Développement limité et intégrale

Ayoub Hajlaoui

N'oublie pas la constante ! Si ce jour elle est nulle,
Tel oubli finira par fausser nos calculs.

Énoncé : (temps conseillé : 10 min)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\displaystyle\int_x^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

Déterminer le développement limité de f en 0 à l'ordre 5.

Correction :

Typiquement le genre de situation où il est commode de passer par un DL de f'

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t)=\sqrt{1+t^2}$. g est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet une primitive G sur $\mathbb{R}$ (de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$). On a alors, pour tout réel x : $f(x)=G(x^2)-G(x)$
f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ par composée et somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, $f'(x)=2xG'(x^2)-G'(x)=2xg(x^2)-g(x)=2x\sqrt{1+x^4}-\sqrt{1+x^2}$

Il nous faut un DL à l'ordre 4 de f' en 0 et on en déduira à DL à l'ordre 5 de f en 0.

Rappelons : $(1+x)^\alpha \underset{0}{=} 1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+...+\dfrac{\alpha(\alpha-1)..(\alpha-n+1)}{n!}x^n+O(x^{n+1})$

$\sqrt{1+x^4}=(1+x^4)^{\frac{1}{2}}\underset{0}{=}1+O(x^4)$ donc $\sqrt{1+x^4}\underset{0}{=}1+o(x^3)$ *DL à l'ordre 3 suffisant car on va le multiplier par x...*

$\sqrt{1+x^2}\underset{0}{=}1+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}(x^2)^2+o(x^4)=1+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{8}x^4+o(x^4)$

Donc $f'(x)\underset{0}{=}2x\big(1+o(x^3)\big)-\big(1+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{8}x^4+o(x^4)\big)=2x+o(x^4)-1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{8}+o(x^4)$

D'où : $f'(x)\underset{0}{=}-1+2x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{8}+o(x^4)$

Et maintenant, on va pouvoir primitiver pour obtenir notre DL de f en 0 à l'ordre 5 EN N'OUBLIANT PAS LA CONSTANTE

Donc $f(x)\underset{0}{=}f(0)-x+x^2-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{40}+o(x^5)$.

Bon, il se trouve ici que $f(0)=0$... Je n'avais donc aucune raison de crier, mais ne l'oubliez pas en général

D'où $\boxed{f(x)\underset{0}{=}-x+x^2-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{40}+o(x^5)}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com