Exponentielle et étude de fonction

Ayoub Hajlaoui

S'il dérive à toute heure, l'élève qui s'en sort
esquive les erreurs et redérive encore.

Énoncé : (temps conseillé : 1 heure) *D'après bac S Antilles-Guyane, sept 2008*

On pourra utiliser le fait que pour tout réel $a > 0$, l'équation $e^x = a$ admet pour unique solution $x = ln(a)$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + 2 - \dfrac{4e^x}{e^x + 3}$.

On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. (a) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
   (b) Étudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à la droite $\mathcal{D}_1$ d'équation $y = x - 2$.
2. (a) On note f' la fonction dérivée de f. Calculer $f'(x)$ et montrer que, pour tout réel x, on a :

$$f'(x) = \left(\frac{e^x - 3}{e^x + 3}\right)^2$$

   (b) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser le tableau de variations de la fonction f.
3. Que peut-on dire de la tangente $\mathcal{D}_2$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point I d'abscisse $\ln 3$?
4. (a) Montrer que la tangente $\mathcal{D}_3$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 a pour équation : $y = \dfrac{1}{4}x + 1$.
   (b) Étudier les variations de f' sur $\mathbb{R}$.

Correction :

1)a) *Toujours vérifier si la limite ne se calcule pas « directement »avant de se lancer dans des techniques pour lever une indétermination qui n'existe que dans notre tête...*

$\lim\limits_{x\to-\infty} x+2 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$. Donc par produit, quotient et somme de limites : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$

En $+\infty$, par contre, il y a bien une forme indéterminée, les numérateur et dénominateur de la fraction tendant tous les deux vers $+\infty$...

Pour tout réel x, $\dfrac{4e^x}{e^x + 3} = \dfrac{4e^x}{e^x(1 + \frac{3}{e^x})} = \dfrac{4}{1 + \frac{3}{e^x}}$.

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$. Donc par somme et quotient de limites : $\dfrac{4}{1 + \frac{3}{e^x}} = \dfrac{4}{1 + 0} = 4$.

Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to+\infty} x + 2 = +\infty$. Finalement, par somme de limites : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

1)b) *Ce genre de question fait peur aux élèves, mais il revient uniquement à savoir, selon les valeurs de* x*, qui de* $f(x)$ *ou de* $x-2$ *est le plus grand. Autrement dit, à résoudre une inéquation.*
Résolvons sur $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) \geq x-2$:

$$f(x) \geq x-2 \Longleftrightarrow x+2-\frac{4\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+3} \geq x-2 \Longleftrightarrow x+2-\frac{4\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+3}-x+2 \geq 0 \Longleftrightarrow 4-\frac{4\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+3} \geq 0$$
$$\Longleftrightarrow \frac{4\mathrm{e}^x+12-4\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+3} \geq 0 \Longleftrightarrow \frac{12}{\mathrm{e}^x+3} \geq 0.$$

Or, la dernière inégalité est vraie pour tout réel x (en effet, $12>0$ et $\mathrm{e}^x+3>0$)
Donc l'inégalité $f(x) \geq x-2$ aussi est vraie pour tout réel x (et c'est même une inégalité stricte puisqu'on a en fait, pour tout réel x : $\dfrac{12}{\mathrm{e}^x+3}>0$)

La courbe $\mathcal{C}$ est donc toujours au-dessus de la droite $\mathcal{D}_1$.

2)a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) et somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x : $f(x)=x+2-4\times\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+3}=x+2-4\times\dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x)=\mathrm{e}^x$, $v(x)=\mathrm{e}^x+3$, $u'(x)=\mathrm{e}^x$ et $v'(x)=\mathrm{e}^x$. Donc, pour tout réel x :
$$f'(x)=1-4\times\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}=1-4\times\frac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x+3)-\mathrm{e}^x\times\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+3)^2}=1-4\times\frac{\mathrm{e}^{2x}+3\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{2x}}{(\mathrm{e}^x+3)^2}$$
Ma petite astuce a été de sortir le 4 *en facteur du quotient pour ne pas le faire intervenir dans le calcul de la dérivée du quotient. Ça facilite légèrement le calcul.*

Donc, pour tout réel x : $f'(x)=1-\dfrac{12\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+3)^2}=\dfrac{(\mathrm{e}^x+3)^2-12\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+3)^2}=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}+6\mathrm{e}^x+9-12\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+3)^2}$
$$=\frac{\mathrm{e}^{2x}-6\mathrm{e}^x+9}{(\mathrm{e}^x+3)^2}=\frac{(\mathrm{e}^x)^2-2\times3\times\mathrm{e}^x+3^2}{(\mathrm{e}^x+3)^2}=\frac{(\mathrm{e}^x-3)^2}{(\mathrm{e}^x+3)^2}$$

Finalement : pour tout réel x, $f'(x)=\left(\dfrac{\mathrm{e}^x-3}{\mathrm{e}^x+3}\right)^2$

2)b) Pour tout réel x, $f'(x) \geq 0$ (car c'est un carré). De plus $f'(x)=0$ si et seulement si $\mathrm{e}^x-3=0$, c'est-à-dire si et seulement si $\mathrm{e}^x=3$, c'est-à-dire si et seulement si $x=\ln(3)$
Soit vous avez fait la fonction logarithme népérien en classe et ce qui précède ne vous pose aucune difficulté, soit vous vous servez des deux premières lignes de l'énoncé.

f' est positive sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule qu'en un point. Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

On aurait pu ne pas s'embêter autant, et se contenter de constater que f' *étant positive sur* $\mathbb{R}$*,* f *est croissante sur* $\mathbb{R}$ *(sans préciser « strictement »). Mais ça ne coûtait pas grand-chose de nous offrir cette précision, donc je l'ai fait. D'autant plus que ça peut être utile dans bien des exercices où il faut utiliser le corollaire du TVI (même si ce n'est pas le cas ici), et où la stricte monotonie est donc importante.*

On obtient donc le tableau de variations suivant pour f :

x	$-\infty$	$+\infty$
f	$-\infty$ ↗	$+\infty$

3) *« Que peut-on dire … ? » Élève, je détestais les questions qui commençaient ainsi. Elles me donnaient une certaine impression d'arbitraire. Et si l'on pouvait dire plein de choses ? Et s'il fallait choisir ? Comment m'assurer que je vais dire ce qu'on attend que je dise ? Soyons pragmatique. Que peut-on dire d'une tangente à une courbe en un certain point ? Si ce n'est que, peut-être, elle est horizontale ?*

$$f'(\ln(3)) = \left(\frac{e^{\ln(3)} - 3}{e^{\ln(3)} + 3}\right)^2 = \left(\frac{3-3}{3+3}\right)^2 = 0$$

Même remarque qu'en 2)b) : soit vu avez déjà vu $\ln$ *en classe, soit vous vous servez de l'indication de l'énoncé. D'ailleurs, nous avions déjà dit en 2)b) que* f' *s'annulait en* $\ln(3)$

Nous pouvons en déduire que la tangente $\mathcal{D}_2$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point I d'abscisse $\ln 3$ est parallèle à l'axe des abscisses.

4)a) La tangente $\mathcal{D}_3$ à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 a pour équation : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$f(0) = 0 + 2 - \dfrac{4e^0}{e^0+3} = 2 - \dfrac{4}{4} = 1$ et $f'(0) = \left(\dfrac{e^0 - 3}{e^0 + 3}\right)^2 = \left(\dfrac{1-3}{1+3}\right)^2 = \left(-\dfrac{2}{4}\right)^2 = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$

$\boxed{\mathcal{D}_3 \text{ a donc pour équation } y = \frac{1}{4}x + 1}$

4)b) f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ par quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

f' est de la forme u^2, dont la dérivée est $2u \times u'$. Dédicace aux (nombreux) élèves qui connaissent parfaitement la formule générale $(u^n)' = nu^{n-1} \times u'$, mais qui ont du mal à l'appliquer avec $n = 2$...

Pour tout réel x, $f'(x) = (u(x))^2$ avec $u(x) = \dfrac{e^x - 3}{e^x + 3}$ et $u'(x) = \dfrac{e^x(e^x+3) - (e^x - 3)e^x}{(e^x+3)^2}$

Donc pour tout réel x, $f''(x) = 2 \times \left(\dfrac{e^x - 3}{e^x + 3}\right) \times \dfrac{e^x(e^x+3) - (e^x-3)e^x}{(e^x+3)^2} = 2 \times \left(\dfrac{e^x-3}{e^x+3}\right) \times \dfrac{6e^x}{(e^x+3)^2}$

D'où : $f''(x) = \dfrac{12e^x(e^x-3)}{(e^x+3)^3}$

Or, pour tout réel x, $12e^x > 0$ et $(e^x+3)^3 > 0$ (la fonction exp étant strictement positive sur $\mathbb{R}$)

Donc $f''(x)$ est du signe de $e^x - 3$

$f''(x) \geq 0 \iff e^x - 3 \geq 0 \iff e^x \geq 3 \iff e^x \geq e^{\ln(3)} \iff x \geq \ln(3)$ par croissance de exp sur $\mathbb{R}$

(De même, $f''(x) = 0 \iff x = \ln(3)$)

Ceux qui ont vu les propriétés de la fonction $\ln$*, notamment sa croissance sur* $]0\ ;\ +\infty[$*, pouvaient aussi écrire (et ça revient au même) :* $e^x \geq 3 \iff \ln(e^x) \geq \ln(3)$ *par croissance de* $\ln$ $\iff x \geq \ln(3)$

On a donc : $f''(x) > 0$ pour $x > \ln(3)$, $f''(x) = 0$ pour $x = \ln(3)$, et $f''(x) < 0$ pour $x < \ln(3)$.

Du signe de f'', on déduit les variations de f' :

$\boxed{f' \text{ est strictement décroissante sur }]-\infty\ ;\ \ln(3)] \text{ et strictement croissante sur } [\ln(3)\ ;\ +\infty[}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com