Logarithme et suite

Ayoub Hajlaoui

Voici pourquoi je fais souvent telle jonction :
Dans nombre de sujets, suite épouse fonction.

Énoncé : (temps conseillé : 1 heure) *D'après EM Lyon 2010 ECE*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - \ln(1+x^2)$

1)a) Déterminer le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
b) Montrer que pour tout réel $x \geq 0$, $f(x) \geq 0$
2) Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x)$.
3)a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.
b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
Indication : on pourra montrer que pour tout $x \geq 1$, $1 + x^2 \leq 2x^2$
4) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$
a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
b) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \geq 0$
c) Établir que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Correction :

1)a) La fonction $x \mapsto 1 + x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme. De plus, pour tout réel x, $1 + x^2 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc, par composition, $x \mapsto \ln(1+x^2)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Enfin, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par somme de telles fonctions.

Pour tout réel x, $f(x) = x - \ln\big(u(x)\big)$ avec $u(x) = 1 + x^2$ et $u'(x) = 2x$. Donc :
$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 1 - \dfrac{u'(x)}{u(x)} = 1 - \dfrac{2x}{1+x^2}$ *(pas une super forme pour déterminer son signe)*
$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \dfrac{1+x^2-2x}{1+x^2} = \dfrac{(x+1)^2}{1+x^2}$ *(oui, les identités remarquables, c'est utile...)*
Donc : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) \geq 0$, et f' ne s'annule qu'en -1. $\boxed{f \text{ est donc strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$

1)b) $f(0) = 0 - \ln(1+0^2) = 0 - \ln(0) = 0$. Et f est croissante sur $\mathbb{R}$.
Donc : $\forall x \geq 0,\ f(x) \geq f(0)$. Autrement dit : $\boxed{\forall x \geq 0,\ f(x) \geq 0}$

2) Pour tout réel x, $f'(x) = 1 - \dfrac{2x}{1+x^2} = 1 - 2 \times \dfrac{x}{1+x^2}$. *Oui, je préfère dériver cette expression de $f'(x)$ plutôt que l'autre..*
f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ par quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) et somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, $f'(x) = 1 - 2 \times \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = x$, $u'(x) = 1$, $v(x) = 1 + x^2$, et $v'(x) = 2x$
Donc : $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = -2 \times \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} = -2 \times \dfrac{1+x^2 - x \times 2x}{(1+x^2)^2} = -2 \times \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$

Finalement : $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ f''(x) = \dfrac{2(x^2-1)}{(1+x^2)^2}}$

3)a) *Toujours essayer de tête un calcul simple de limite pour voir si ça ne marche pas directement (afin de ne pas s'imaginer une forme indéterminée là où il n'y en a pas...)*
$\lim_{x\to-\infty} 1+x^2 = +\infty$ et $\lim_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty$ donc, par composition de limites : $\lim_{x\to-\infty} \ln(1+x^2) = +\infty$
Donc $\lim_{x\to-\infty} -\ln(1+x^2) = -\infty$. Enfin, par somme de limites : $\lim_{x\to-\infty} x - \ln(1+x^2) = -\infty$
Autrement dit : $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$

3)b) *Bon, là, en l'occurrence, notre petit calcul mental préliminaire nous mène à une forme indéterminée... L'énoncé donne une indication*
Montrons que pour tout $x \geq 1,\ 1+x^2 \leq 2x^2$:
pour tout $x \geq 1,\ 1+x^2-2x^2 = 1-x^2 = (1+x)(1-x)$ avec $1+x > 0$ et $1-x \leq 0$ car $x \geq 1$
Donc, pour tout $x \geq 1,\ 1+x^2-2x^2 \leq 0$. Autrement dit, pour tout $x \geq 1,\ 1+x^2 \leq 2x^2$
D'accord, et alors ? Et alors, faisons le lien avec f.

Par croissance de la fonction ln sur $]0;+\infty[$, on a donc, pour tout $x \geq 1$: $\ln(1+x^2) \leq \ln(2x^2)$
Donc (en multipliant par $-1 < 0$) : $-\ln(1+x^2) \geq -\ln(2x^2)$, et enfin $x-\ln(1+x^2) \geq x-\ln(2x^2)$
D'où : pour tout $x \geq 1$, $f(x) \geq x - \ln(2x^2)$.
Et alors ? Et alors la limite en $+\infty$ du membre de droite est plus simple à calculer...
Pour tout $x \geq 1$, $x - \ln(2x^2) = x - \ln(2) - \ln(x^2) = x - \ln(2) - 2\ln(x)$
Et là, peut-être qu'une factorisation classique...
Donc pour tout $x \geq 1,\ x-\ln(2x^2) = x\left(1 - \frac{\ln(2)}{x} - 2\frac{\ln(x)}{x}\right)$
Par quotient de limites : $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(2)}{x} = 0$. Et par croissance comparée : $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$
Donc, par somme puis produit de limites : $\lim_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{\ln(2)}{x} - 2\frac{\ln(x)}{x}\right) = +\infty$
Autrement dit : $\lim_{x\to+\infty} x - \ln(2x^2) = +\infty$. Rappelons : $\forall x \geq 1,\quad f(x) \geq x - \ln(2x^2)$
Par théorème de comparaison, on peut conclure : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

4)a) Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = u_n - \ln(1+u_n^2) - u_n = -\ln(1+u_n^2)$
Connaît-on le signe d'une telle quantité ?
Pour tout entier naturel n, $u_n^2 \geq 0$ donc $1+u_n^2 \geq 1$, et donc, par croissance de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$, $\ln(1+u_n^2) \geq \ln(1) = 0$. D'où : $-\ln(1+u_n^2) \leq 0$. On a donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n \leq 0$.
$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est donc décroissante.}}$

4)b) *Une proposition à démontrer pour tout entier naturel n, on ne voit pas comment le faire directement, et la suite en question est définie par une relation de récurrence : un raisonnement par récurrence semble approprié.*
Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété P_n : « $u_n \geq 0$ » est vraie.
Initialisation : $u_0 = 1$ et $1 \geq 0$. Donc P_0 est vraie.
Hérédité : Supposons P_n vraie pour un certain entier naturel n, et montrons P_{n+1}. Autrement dit, supposons $u_n \geq 0$, et montrons $u_{n+1} \geq 0$
$u_{n+1} = f(u_n)$ avec $u_n \geq 0$ par hypothèse de récurrence. Donc d'après 1)b), $u_{n+1} \geq 0$.
Et oui ! Aussi simple que ça, si on n'oublie pas ce qui a été fait précédemment.
On a bien montré : $P_n \Rightarrow P_{n+1}$. La propriété est héréditaire.
Conclusion : $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ u_n \geq 0.}$

4)c) (u_n) est décroissante d'après 4a) et minorée par 0 d'après 4)b). Donc (u_n) converge vers un certain réel $l \geq 0$. Nous savons : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$, avec f continue (car dérivable) sur $\mathbb{R}$. Donc $l = f(l)$ *(vu en cours pour la plupart, et pour les autres, il s'agit tout simplement de passer à la limite dans cette égalité)*
Autrement dit : $l = l - \ln(1+l^2)$. Donc $\ln(1+l^2) = 0$. Par suite : $1 + l^2 = e^0 = 1$. Donc $l^2 = 0$
Finalement, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge vers } 0.}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com