Matrices réelles semblables sur $\mathbb{C}$

Ayoub Hajlaoui

Deux matrices réelles, qui sur $\mathbb{C}$ sont semblables
le sont aussi sur $\mathbb{R}$. La démo est faisable.

Énoncé : (temps conseillé : 20 min)

Soit n un entier naturel non nul. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables sur $\mathbb{C}$. Autrement dit, il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible telle que $A = PBP^{-1}$

Montrer que A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$
(autrement dit, qu'il existe une matrice $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que $A = QBQ^{-1}$).

Correction :

$A = PBP^{-1}$. $P = P_1 + iP_2$ où P_1 est la partie réelle de P et P_2 la partie imaginaire de P. (P_1 (resp. P_2) est la matrice dont les coefficients sont les parties réelles (imaginaires) des coefficients de P)

Il semble naturel de penser à une telle décomposition, vu que notre but final est de trouver une matrice de passage réelle entre A et B. Mais exprimer P^{-1} risque de ne pas être commode. Comment éviter cette difficulté ?

On a aussi : $AP = PB$. Autrement dit : $A(P_1 + iP_2) = (P_1 + iP_2)B$.
D'où : $AP_1 + iAP_2 = P_1B + iP_2B$
Par unicité de cette écriture algébrique (découlant directement de l'unicité de la forme algébrique dans $\mathbb{C}$) : $\begin{cases} AP_1 &= P_1B \\ AP_2 &= P_2B \end{cases}$

Et nous voulons montrer qu'il existe $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que $A = QBQ^{-1}$, c'est-à-dire telle que $AQ = QB$. Mais attention, si nous savons P inversible, rien ne nous indique que sa partie réelle P_1 (resp. sa partie imaginaire P_2) soit inversible... À la rigueur, on peut établir une égalité entre le rang de P_1 et celui de sa partie réelle (ou imaginaire), comme dans cet exercice, mais ça n'apporte rien d'utile ici.
Mais alors, comment obtenir une matrice de passage inversible à partir des deux équations ci-dessus ? Par combinaison linéaire !

Montrons qu'il existe un réel α tel que $P_1 + \alpha P_2$ soit inversible.

$\phi = \det(P_1 + XP_2)$ est un polynôme de degré au plus n.
Donc soit il est nul, soit il admet au plus n racines réelles. *Et il n'est pas nul...*
Or, $\phi(i) = \det(P_1 + iP_2) = \det(P) \neq 0$ puisque P est inversible.
Donc ϕ n'est pas le polynôme nul. Il a donc un nombre fini de racines réelles (et même complexes, même si on s'en fiche ici).
Il existe donc un réel α tel que $\phi(\alpha) \neq 0$. Autrement dit, tel que $\det(P_1 + \alpha P_2) \neq 0$.
En reprenant le système ci-haut : $AP_1 + \alpha AP_2 = P_1B + \alpha P_2B$.
On a donc : $A(P_1 + \alpha P_2) = (P_1 + \alpha P_2)B$, où $P_1 + \alpha P_2$ est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
$\boxed{A \text{ et } B \text{ sont donc bien semblables sur } \mathbb{R}.}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com