Rang de la partie réelle d'une matrice complexe

Ayoub Hajlaoui

Énoncé : (temps conseillé : 25 min)

(Pour toute matrice M à coefficients complexes, $\overline{M}$ désigne la matrice dont les coefficients sont les conjugués de ceux de M.)

Soit n un entier naturel non nul.

1) Soit E un espace vectoriel de dimension n, et soient f et g deux endomorphismes de E. Montrer : $\mathrm{rg}(f+g) \leq \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$

2) Soit $p \in \mathbb{N}^*$, et soient $X_1, ..., X_p$ p vecteurs de $\mathbb{C}^n$. Montrer que la famille $(X_1, ..., X_p)$ est libre (dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^n$) si et seulement si la famille $\left(\overline{X_1}, ..., \overline{X_p}\right)$ est libre.

3) Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et soit R sa partie réelle. Montrer que $\mathrm{rg}(R) \leq 2\mathrm{rg}(A)$.

Correction :

1) *Une démo de cours ou quasiment, en fonction de votre filière.*

$\mathrm{rg}(f+g) = \dim \mathrm{Im}(f+g)$. Or, $\mathrm{Im}(f+g) \subset \mathrm{Im}f + \mathrm{Im}g$. En effet :
$\forall y \in \mathrm{Im}(f+g),\ \exists x \in E,\ y = (f+g)(x) = f(x) + g(x)$, avec $f(x) \in \mathrm{Im}f$ et $g(x) \in \mathrm{Im}g$.
Autrement dit : $\forall y \in \mathrm{Im}(f+g), y \in \mathrm{Im}f + \mathrm{Im}g$. D'où : $\mathrm{Im}(f+g) \subset \mathrm{Im}f + \mathrm{Im}g$

Donc $\dim \mathrm{Im}(f+g) \leq \dim(\mathrm{Im}f + \mathrm{Im}g)$. Or, $\dim\ (\mathrm{Im}f + \mathrm{Im}g) \leq \dim \mathrm{Im}f + \dim \mathrm{Im}g$
Rappelons que pour F et G deux sous-espaces vectoriels de E, $\dim(F+G) \leq \dim F + \dim G$, par exemple en vertu de la formule de Grassmann

Donc $\dim \mathrm{Im}(f+g) \leq \dim \mathrm{Im}f + \dim \mathrm{Im}g$. Autrement dit : $\boxed{\mathrm{rg}(f+g) \leq \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)}$

2) *Par double contraposition, cela revient aussi à montrer que la famille $(X_1, ..., X_p)$ est liée si et seulement si la famille $\left(\overline{X_1}, ..., \overline{X_p}\right)$ est liée. Et exprimer le fait qu'une famille est liée me semble plus simple ici.*
Si je veux montrer l'équivalence $\left(\overline{X_1}, ..., \overline{X_p}\right)$ libre si et seulement si $\left(\overline{X_1}, ..., \overline{X_p}\right)$ libre. Il s'agit alors de montrer qu'une implication (cf définition de la liberté) est équivalente à une autre implication. Même si c'est faisable, il y a moyen de l'éviter.

Si $(X_1, ..., X_p)$ est liée, il existe $\lambda_1, ...\lambda_p \in \mathbb{C}$, non tous nuls, tels que $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k X_k = 0$

On a alors : $\overline{\sum_{k=1}^{p} \lambda_k X_k} = 0$. Autrement dit : $\sum_{k=1}^{p} \overline{\lambda_k}\ \overline{X_k} = 0$, où les λ_k sont non tous nuls.
Donc la famille $(X_1, ..., X_p)$ est liée.
D'où l'implication : pour tous $X_1, ..., X_p \in \mathbb{C}^n$, « $(X_1, ..., X_p)$ liée » $\Longrightarrow$ « $\left(\overline{X_1}, ..., \overline{X_p}\right)$ liée. »
Et en appliquant cette implication à $\overline{X_1}, ..., \overline{X_p}$, on a alors aussi :
« $\left(\overline{X_1}, ..., \overline{X_p}\right)$ liée » $\Longrightarrow$ « $(X_1, ..., X_p)$ liée. » Finalement :

$\boxed{(X_1, ..., X_p) \text{ est libre (resp. liée) si et seulement si la famille } \left(\overline{X_1}, ..., \overline{X_p}\right) \text{ est libre (resp. liée).}}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com

3) *Comment se servir des questions précédentes ?*

$R = \frac{1}{2}\left(A + \overline{A}\right)$ donc $\mathrm{rg}(R) = \mathrm{rg}\left(\frac{1}{2}(A + \overline{A})\right) = \mathrm{rg}\left(A + \overline{A}\right)$.
Or, d'après 1), $\mathrm{rg}\left(A + \overline{A}\right) \leq \mathrm{rg}\left(A\right) + \mathrm{rg}\left(\overline{A}\right)$

En effet, l'inégalité prouvée en 1 porte sur des rangs d'endomorphismes. Et le rang d'un endomorphisme est égal au rang de sa matrice dans une base donnée. L'inégalité est donc aussi valable pour les matrices.

Donc $\mathrm{rg}\left(R\right) \leq \mathrm{rg}\left(A\right) + \mathrm{rg}\left(\overline{A}\right)$ *Et nous voulons montrer* $rg\left(R\right) \leq 2rg\left(A\right)$*...*

$\mathrm{rg}\left(\overline{A}\right)$ est le cardinal maximal d'une famille libre de vecteurs colonnes de $\overline{A}$.
Notons $C_1, C_2 ... C_n$ les vecteurs colonnes de A. $\mathrm{rg}\left(\overline{A}\right)$ est le cardinal de la plus grande sous-famille libre de $(\overline{C_1}, ..., \overline{C_n})$ *(Oui, je sais, il peut y en avoir plusieurs)*

Or, d'après 2), une sous-famille de $(C_1, ..., C_n)$ est libre si et seulement si la sous-famille correspondante de $(\overline{C_1}, ..., \overline{C_n})$ est libre.
Donc $\mathrm{rg}\left(\overline{A}\right)$ est aussi le cardinal de la plus grande sous-famille libre de $(C_1, ..., C_n)$.
Autrement dit : $\mathrm{rg}\left(\overline{A}\right) = \mathrm{rg}\left(A\right)$.

Finalement : $\boxed{\mathrm{rg}\left(R\right) \leq 2\mathrm{rg}\left(A\right)}$