# Troisième degré, dérivée, et angle

Ayoub Hajlaoui

*Aère ta cellule aux murs bien trop étroits.*
*Et en ces canicules, parlons de degré trois !*

**Énoncé :** (temps conseillé : 20 minutes)

Soient $z_1$, $z_2$ et $z_3$ trois nombres complexes distincts.
Soient $M_1$, $M_2$ et $M_3$ les points respectivement associés sur le plan complexe.
Soit $P$ le polynôme complexe défini par $P(X) = (X - z_1)(X - z_2)(X - z_3)$
Enfin, soient $\alpha_1$ et $\alpha_2$ les racines complexes de $P'$, représentées respectivement sur le plan complexe par les points $N_1$ et $N_2$.
Montrer l'égalité angulaire suivante : $\left( \overrightarrow{M_1N_1}, \overrightarrow{M_1M_2} \right) = \left( \overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_1N_2} \right)$

**Correction :**

*On aimerait écrire* $\left( \overrightarrow{M_1N_1}, \overrightarrow{M_1M_2} \right) = \arg\left(\frac{z_2 - z_1}{\alpha_1 - z_1}\right)$ *et* $\left( \overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_1N_2} \right) = \arg\left(\frac{\alpha_2 - z_1}{z_3 - z_1}\right)$
*Mais avant de le faire, assurons-nous que* $z_2 - z_1 \neq 0$, $\alpha_1 - z_1 \neq 0$, $\alpha_2 - z_1 \neq 0$, $z_3 - z_1 \neq 0$, *afin de nous assurer qu'on ne divise pas par* $0$, *et qu'on ne parle pas d'argument d'un complexe nul...*

$z_1$, $z_2$ et $z_3$ sont distincts, donc $z_2 - z_1 \neq 0$ et $z_3 - z_1 \neq 0$
Par ailleurs, si on avait $\alpha_1 = z_1$, $z_1$ serait donc à la fois racine de $P$ et $P'$. $z_1$ serait donc (au moins) racine double de $P$, ce qui n'est pas le cas (puisque $P$ a trois racines simples distinctes). Donc $\alpha_1 - z_1 \neq 0$. De même, $\alpha_2 - z_1 \neq 0$.
On peut donc écrire $\left( \overrightarrow{M_1N_1}, \overrightarrow{M_1M_2} \right) = \arg\left(\frac{z_2 - z_1}{\alpha_1 - z_1}\right)$ et $\left( \overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_1N_2} \right) = \arg\left(\frac{\alpha_2 - z_1}{z_3 - z_1}\right)$

*Maintenant, comment arriver à une telle égalité ? Quel lien peut-on trouver entre les racines de* $P$ *et celles de* $P'$ *?*

$P(X) = (X - z_1)(X - z_2)(X - z_3)$.
D'où $P'(X) = (X - z_2)(X - z_3) + (X - z_1)(X - z_3) + (X - z_1)(X - z_2)$ (*)
D'autre part, vu que $\alpha_1$ et $\alpha_2$ sont les racines de $P'$ : $P'(X) = a(X - \alpha_1)(X - \alpha_2)$ où a est le coefficient dominant de $P'$ (celui devant $X^2$ dans l'expression développée de $P'$).
D'après (*), on sait : $a = 3$
On a donc : $(X - z_2)(X - z_3) + (X - z_1)(X - z_3) + (X - z_1)(X - z_2) = 3(X - \alpha_1)(X - \alpha_2)$

*Que faire de cette expression ? N'oubliez pas que c'est une égalité entre fonctions .. Autrement dit, on peut remplacer* $X$ *par le nombre complexe de notre choix et l'égalité restera vraie.*
Par suite, $(z_1 - z_2)(z_1 - z_3) + (z_1 - z_1)(z_1 - z_3) + (z_1 - z_1)(z_1 - z_2) = 3(z_1 - \alpha_1)(z_1 - \alpha_2)$, c'est-à-dire : $(z_1 - z_2)(z_1 - z_3) = 3(z_1 - \alpha_1)(z_1 - \alpha_2)$
On aboutit à : $\frac{z_1 - z_2}{z_1 - \alpha_1} = 3 \times \frac{z_1 - \alpha_2}{z_1 - z_3}$ et donc $\frac{z_2 - z_1}{\alpha_1 - z_1} = 3 \times \frac{\alpha_2 - z_1}{z_3 - z_1}$
Finalement, $\arg\left(\frac{z_2 - z_1}{\alpha_1 - z_1}\right) = \arg\left(3 \times \frac{\alpha_2 - z_1}{z_3 - z_1}\right) = \arg(3) + \arg\left(\frac{\alpha_2 - z_1}{z_3 - z_1}\right) = \arg\left(\frac{\alpha_2 - z_1}{z_3 - z_1}\right)$.
En conclusion : $\boxed{\left( \overrightarrow{M_1N_1}, \overrightarrow{M_1M_2} \right) = \left( \overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_1N_2} \right)}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com