Classe de Gevrey

Ayoub Hajlaoui

Matant ses dérivées, cette fonction œuvrait
dans l'espoir d'intégrer la classe de Gevrey.

Énoncé : (temps conseillé : 30 min) *D'après ENS MP 2016*

Soient $s \in [1\,;+\infty[$ et $I = [a\,;b]$ $(a < b)$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ sur I. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $f^{(n)}$ la dérivée n-ième de f. $\left(f^{(0)} = f\right)$

f est dite dans la classe de Gevrey d'ordre s sur I s'il existe $C > 0$ et $R > 0$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ |f^{(n)}(x)| \leq C\dfrac{(n!)^s}{R^n}$. On note alors $f \in \mathcal{G}^s(I)$.

1) Montrer que $\mathcal{G}^s(I)$ est un espace vectoriel.
2) Montrer que $\mathcal{G}^s(I)$ contient les fonctions polynomiales.
On pourra utiliser le fait que toute fonction continue sur un segment I est bornée.

Correction :

1) *La fameuse astuce du sous-espace vectoriel, pour ne pas avoir à tout refaire à la main...*

Par définition, $\mathcal{G}^s(I) \subset C^\infty(I, \mathbb{R})$, et $C^\infty(I, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel.
Le vecteur nul de l'espace vectoriel $C^\infty(I, \mathbb{R})$ est la fonction nulle sur I, qu'on notera f_0.
$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ |f_0^{(n)}(x)| = |0| = 0$.
Donc, en prenant (par exemple) $C = 1$ et $R = 1$, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ |f_0^{(n)}(x)| \leq C\dfrac{(n!)^s}{R^n}$
Donc $f_0 \in \mathcal{G}^s(I)$, et donc $\mathcal{G}^s(I)$ est non vide.

Montrons maintenant que $\mathcal{G}^s(I)$ est stable par combinaison linéaire.
Soient f et $g \in \mathcal{G}^s(I)$, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
Par définition de $\mathcal{G}^s(I)$, il existe $C_1, R_1, C_2, R_2 > 0$ tels que :
$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ |f^{(n)}(x)| \leq C_1\dfrac{(n!)^s}{R_1^n}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ |g^{(n)}(x)| \leq C_2\dfrac{(n!)^s}{R_2^n}$.
(pas forcément les mêmes constantes pour f et g, même si ces cstantes ne dépendent pas de n)

On a alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ |(\lambda f + g)^{(n)}(x)| = |\lambda f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x)| \leq |\lambda||f^{(n)}(x)| + |g^{(n)}(x)|$ (inégalité triangulaire)
Donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ |(\lambda f + g)^{(n)}(x)| \leq |\lambda|C_1\dfrac{(n!)^s}{R_1^n} + C_2\dfrac{(n!)^s}{R_2^n} = \left(\dfrac{|\lambda|C_1}{R_1^n} + \dfrac{C_2}{R_2^n}\right)(n!)^s$

Oui mais voilà, on aimerait un $C > 0$ et un $R > 0$ tels que :
$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ |(\lambda f + g)^{(n)}(x)| \leq C\dfrac{(n!)^s}{R^n}$. *Comment les mettre en évidence ? Déjà, en faisant en sorte que la somme de fractions obtenue soit remplacée par une seule fraction. MAIS en faisant en sorte que son numérateur ne dépende pas de n (mis à part le $(n!)^s$ bien sûr)... En ce sens, écrire $\dfrac{|\lambda|C_1}{R_1^n} + \dfrac{C_2}{R_2^n} = \dfrac{|\lambda|C_1R_2^n + C_2R_1^n}{R_1^nR_2^n}$ ne nous avance pas plus que ça...*

Posons $R = \min(R_1, R_2)$. Par décroissance de la fonction inverse sur $]0;\ +\infty[$, on a alors :

$\left(\dfrac{|\lambda|C_1}{R_1^n} + \dfrac{C_2}{R_2^n}\right)(n!)^s \leq \left(\dfrac{|\lambda|C_1}{R^n} + \dfrac{C_2}{R^n}\right)(n!)^s = \dfrac{|\lambda|C_1 + C_2}{R^n} \times (n!)^s$. On a donc montré :

$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ |(\lambda f + g)^{(n)}(x)| \leq \dfrac{C}{R^n} \times (n!)^s$, avec $C = |\lambda|C_1 + C_2 > 0$ et $R = \min(R_1, R_2) > 0$
Donc $\lambda f + g \in \mathcal{G}^s(I)$.

$\mathcal{G}^s(I)$ est donc stable par combinaison linéaire.

Finalement, $\mathcal{G}^s(I)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$.
$\boxed{\mathcal{G}^s(I) \text{ est donc un espace vectoriel.}}$

2) *Il s'agit donc de montrer que toute fonction polynomiale définie sur I appartient à $\mathcal{G}^s(I)$.*

Soit f une fonction polynomiale de degré k. Si f est la fonction nulle, $f \in \mathcal{G}^s(I)$ (montré précédemment). Si f n'est pas la fonction nulle, f est de degré $k \geq 0$.

Et on aimerait montrer qu'il existe C et $R > 0$ tels que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ |f^{(n)}(x)| \leq C\dfrac{(n!)^s}{R^n}$
La difficulté, c'est que C et R doivent convenir pour tout entier naturel n. Donc pour une infinité d'entiers ! En fait, pas vraiment...

Pour tout $n > k$, $f^{(n)}$ est la fonction nulle *(on dérive une fonction polynomiale plus de fois que son degré)*, donc l'inégalité est vérifiée, et ce quelque soit le choix de $C > 0$ et $R > 0$.

Il s'agit donc seulement de démontrer l'existence de $C > 0$ et $R > 0$ tels que :
$\forall n \in [\![0;\ k]\!],\ \forall x \in I,\ |f^{(n)}(x)| \leq C\dfrac{(n!)^s}{R^n}$

Pour tout $n \in [\![0;\ k]\!]$, la fonction g_n définie sur le segment I par $g_n(x) = \dfrac{f^{(n)}(x)}{(n!)^s}$ est continue (car f est $\mathcal{C}^\infty$). Elle est donc bornée. Autrement dit :

$\forall n \in [\![0;\ k]\!]$, il existe $M_n > 0$ tel que : $\forall x \in I,\ |g_n(x)| \leq M_n$. ($M_n$ dépendant bien sûr de n)
Ou encore : $\forall n \in [\![0;\ k]\!]$, il existe $M_n > 0$ tel que : $\forall x \in I,\ \left|\dfrac{f^{(n)}(x)}{(n!)^s}\right| \leq M_n$.
D'où : $\forall n \in [\![0;\ k]\!]$, il existe $M_n > 0$ tel que : $\forall x \in I,\ |f^{(n)}(x)| \leq M_n \times (n!)^s$

Autant on pourra poser $R = 1$, autant ce M_n qui dépend de n est dérangeant... Oui mais des M_n, il n'y en a pas tant que ça !

Soit $C = \max\left\{M_n,\ n \in [\![0;\ k]\!]\ \right\}$ *(C est le plus grand des M_n)*

On a alors : $\forall n \in [\![0;\ k]\!],\ \forall x \in I,\ |f^{(n)}(x)| \leq M_n \times (n!)^s \leq C \times (n!)^s) = C\dfrac{(n!)^s}{1^n}$.
Cette inégalité restant vraie pour $n > k$ (car alors $f^{(n)}$ est la fonction nulle), on en conclut :

$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ |f^{(n)}(x)| \leq C\dfrac{(n!)^s}{1^n}$. Donc $f \in \mathcal{G}^s(I)$.

$\boxed{\mathcal{G}^s(I) \text{ contient bien les fonctions polynomiales.}}$