Convergence d'intégrale

Ayoub Hajlaoui

C'est l'esprit qui gambade lorsque l'on gamberge.
Montrons que l'intégrale présentée converge

Énoncé : (temps conseillé : 25 min)

Soit f une fonction continue sur $[0\,;1]$.
1) Soit $x \in [0\,;1[$. Montrer que $\displaystyle\int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}}\,\mathrm{d}t$ converge.

2) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 1}\int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}}\,\mathrm{d}t = 0$

Correction :

1) *Ne pas se perdre dans les lettres. x est une constante dans l'intégrale...*
$t \mapsto \dfrac{f(t)}{\sqrt{t-x}}$ *est continue sur* $]x\,;1]$ *par composée et quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) de telles fonctions. Il faut donc voir ce qui se passe en la borne x*
Mais on aurait bien aimé voir t tout seul dans la racine, et pouvoir conclure grâce à Riemann...
Par changement de variable affine $u = t - x$ ($\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$) :
les intégrales $\displaystyle\int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{1-x} \frac{f(u+x)}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$ sont de même nature.
Intéressons-nous donc à cette seconde intégrale, plus commode.

$u \mapsto \dfrac{f(u+x)}{\sqrt{u}}$ est continue sur $]0\,;1-x]$ par composée et quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) de telles fonctions. *Il faut donc voir ce qui se passe en la borne* 0
f est une fonction continue sur l'intervalle fermé borné $[0\,;1]$. Sur cet intervalle, elle est donc bornée et atteint ses bornes. Autrement dit, il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout $y \in [0\,;1]$, $|f(y)| \leq M$
(J'ai pris y non pas pour vous embrouiller, mais parce que x est déjà pris, c'est une constante dans cette question.)

On a alors : pour tout $u \in]0\,;1-x]$, $\left|\dfrac{f(u+x)}{\sqrt{u}}\right| = \dfrac{|f(u+x)|}{\sqrt{u}} \leq \dfrac{M}{\sqrt{u}} = \dfrac{M}{u^{\frac{1}{2}}}$ et $\dfrac{1}{2} < 1$

Par critère de convergence des intégrales de Riemann, $\displaystyle\int_0^{1-x} \frac{M}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$ converge.

Et donc, par comparaison des intégrales de fonctions continues positives, $\displaystyle\int_0^{1-x} \left|\frac{f(u+x)}{\sqrt{u}}\right|\mathrm{d}u$ converge. Autrement dit, $\displaystyle\int_0^{1-x} \frac{f(u+x)}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$ converge absolument, donc converge.

En conclusion : $\boxed{\displaystyle\int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$

2) Pour tout $x \in [0\,;1[$, $\left|\int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}}\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_x^1 \left|\frac{f(t)}{\sqrt{t-x}}\right|\mathrm{d}t$ d'après l'inégalité triangulaire.

Pourquoi attaquer comme ça, et pas frontalement ? Parce que je ne sais pas calculer l'intégrale (aucune info sur f). Mais majorer la valeur absolue de cette intégrale par une quantité qui tendrait vers 0 *lorsque x tend vers* 1 *me permettrait de conclure.*

D'où, pour tout $x \in [0\,;1[$, $\left|\int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}}\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_x^1 \frac{|f(t)|}{\sqrt{t-x}}\,\mathrm{d}t \leq \int_x^1 \frac{\boldsymbol{M}}{\sqrt{t-x}}\,\mathrm{d}t$ où $\boldsymbol{M}$ est le majorant de $|f|$ dont l'existence a été démontrée en 1)

Donc : pour tout $x \in [0\,;1[$, $\left|\int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}}\,\mathrm{d}t\right| \leq \boldsymbol{M}\int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t-x}}\,\mathrm{d}t$

L'intégrale de droite converge bien d'après 1), qui a montré la convergence pour toute fonction f continue sur $[0\,;1]$ *(et la fonction constante égale à* 1 *sur* $[0\,;1]$ *est bien continue sur* $[0\,;1]$*)*

Que faire maintenant ? x tend vers 1*, donc on serait tenté de conclure que, les deux bornes se rapprochant, l'intégrale tendrait vers* 0*. Oui mais la fonction sous l'intégrale dépend aussi de x. Ne sait-on pas tout simplement calculer l'intégrale de droite, maintenant ?*

$\boldsymbol{M}\int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t-x}}\,\mathrm{d}t = \boldsymbol{M}\left[2\sqrt{t-x}\right]_x^1$ *(encore une fois, dans l'intégrale, x est une constante)*

Donc $\boldsymbol{M}\int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t-x}}\,\mathrm{d}t = 2\boldsymbol{M}\left(\sqrt{1-x}-\sqrt{x-x}\right) = 2\boldsymbol{M}\sqrt{1-x}$ et $\lim\limits_{x\to 1} 2\boldsymbol{M}\sqrt{1-x} = 0$

Donc : $\lim\limits_{x\to 1} \boldsymbol{M}\int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t-x}}\,\mathrm{d}t = 0$

Or : pour tout $x \in [0\,;1[$, $0 \leq \left|\int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}}\,\mathrm{d}t\right| \leq \boldsymbol{M}\int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t-x}}\,\mathrm{d}t$

Donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to 1}\left|\int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}}\,\mathrm{d}t\right| = 0$

En conclusion : $\boxed{\lim\limits_{x\to 1}\int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}}\,\mathrm{d}t = 0}$