Extrema d'une fonction de deux variables réelles

Ayoub Hajlaoui

La difficulté de cet exercice n'est pas d'ordre calculatoire. Elle réside dans le fait qu'il faille penser soi-même à plusieurs étapes de la résolution (même si l'énoncé nous aiguille un peu avec la question 1). L'élève qui n'aurait pas saisi la perche, et s'attaquerait à l'étude des extrema de manière " classique " (dérivées partielles d'ordre 2, matrice hessienne ...) subirait une cuisante déception.

Énoncé : (temps conseillé : 20 min)

1) Soient a et b deux réels. Factoriser $ab + a + b + 1$
2) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = (x - 1)(y - 1)e^{x+y} + (x - 1)e^x + (y - 1)e^y$. Déterminer les extrema locaux et globaux de f.

Correction :

1) $ab+a+b+1 = a(b+1)+b+1 = a(b+1)+(b+1)$. Donc $\boxed{ab + a + b + 1 = (a + 1)(b + 1)}$

Si $ab + a + b + 1 = (a + 1)(b + 1)$ *vous saute aux yeux et vous semble évident, tant mieux. Les étapes ci-dessus vous montrent comment en avoir l'idée.*

2) *Ce qui a été fait en 1) doit vous ouvrir les yeux...*
Pour tous réels x et y, $f(x, y) = (x - 1)e^x \times (y - 1)e^y + (x - 1)e^x + (y - 1)e^y$

Il manque $+1$ *pour pouvoir appliquer la factorisation obtenue précédemment ? À vos ordres !*

Pour tous réels x et y, $f(x, y) = (x - 1)e^x \times (y - 1)e^y + (x - 1)e^x + (y - 1)e^y + 1 - 1$. D'après 1), on a donc : $f(x, y) = \left[(x - 1)e^x + 1\right]\left[(y - 1)e^y + 1\right] - 1$

Voilà qui donne envie de baptiser une fonction...
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = (t - 1)e^t + 1$. On a alors, pour tous réels x et y, $f(x, y) = g(x)g(y) - 1$. (*)

f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ par produits et sommes de telles fonctions. Notons $\partial_1(f)$ et $\partial_2(f)$ les dérivées partielles premières de f respectivement par rapport à la première et la seconde variable.
D'après (*), et la fonction g étant dérivable sur $\mathbb{R}$, on a, pour tous réels x et y :
$\partial_1(f)(x, y) = g'(x)g(y)$ et $\partial_2(f)(x, y) = g(x)g'(y)$
(x, y) est un point critique de f si et seulement si $\partial_1(f)(x, y) = \partial_2(f)(x, y) = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $g'(x)g(y) = g'(y)g(x) = 0$

Il semble donc intéressant de regarder g *et* g' *d'un peu plus près...*
Pour tout réel t, $g'(t) = te^t$, du signe de t car $e^t > 0$. g' est donc strictement négative sur $]-\infty\ ;\ 0[$, strictement positive sur $]0\ ;\ +\infty[$
g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Sur $\mathbb{R}$, g admet donc pour minimum $g(0) = 0$. *Oui, j'ai eu la flemme de faire le tableau.*

g et g' ne s'annulent donc qu'en 0. Pour tous réels x et y :
$g'(x)g(y) = g'(y)g(x) = 0 \iff \left[g'(x) = 0 \text{ ou } g(y) = 0\right] \text{ et } \left[g(x) = 0 \text{ ou } g'(y) = 0\right]$
$\iff \left[x = 0 \text{ ou } y = 0\right] \text{ et } \left[x = 0 \text{ ou } y = 0\right] \iff \left[x = 0 \text{ ou } y = 0\right]$

Les points critiques de f sont donc tous les couples (x, y) tels que $x = 0$ ou $y = 0$.
Autrement dit, ce sont les couples qui s'écrivent $(x, 0)$ avec $x \in \mathbb{R}$, ou $(0, y)$ avec $y \in \mathbb{R}$.

Pour tout réel x, $f(x, 0) = g(x)g(0) - 1 = g(x) \times 0 - 1 = -1$.
Pour tout réel y, $f(0, y) = g(0)g(y) - 1 = 0 \times g(y) - 1 = -1$.

Et, pour tous réels x et y, $f(x, y) = g(x)g(y) - 1 \geq -1$ (car $g(x) \geq 0$ et $g(y) \geq 0$, 0 étant le minimum de g sur $\mathbb{R}$).

-1 est donc le minimum global de f sur $\mathbb{R}^2$, et il est atteint en tous points de la forme $(x, 0)$ et $(0, y)$. C'est donc aussi un minimum local (et c'est le seul extremum local, la fonction f n'admettant pas d'autre point critique que les $(x, 0$ et les $(0, y)$).

Personne ne m'ayant demandé a priori de calculer la hessienne de f en ses points critiques, j'ai eu le réflexe de calculer la valeur de f en ses points critiques avant de me lancer dans ce calcul de hessienne... J'espérais prouver de manière directe le caractère d'extremum, ce qui était possible ici. J'imagine que ceux qui auront calculé la hessienne en les points critiques ne peuvent pas conclure sur la nature des points critiques, vu que, sauf erreur de ma part, 0 est valeur propre...

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com