# Groupe de morphismes de groupes

Ayoub Hajlaoui

*Interne, associative, élément neutre, inverse,*
*et d'une marche hâtive, la preuve tu traverses.*

**Énoncé :** (temps conseillé : 20 min) *d'après agrégation interne 2018*

Soit $(G,+)$ un groupe abélien (c'est-à-dire commutatif). On note $\hat{G}$ l'ensemble des morphismes de $G$ dans le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$, c'est-à-dire des applications $f : G \to \mathbb{C}^*$ vérifiant : $\forall x, y \in G,\ f(x+y) = f(x) \times f(y)$.
Pour tous $f_1, f_2 \in \hat{G}$, on note $f_1 * f_2 : G \to \mathbb{C}^*$ l'application $x \mapsto f_1(x)f_2(x)$

1) Montrer que l'ensemble $\hat{G}$ est non vide.
2) Montrer que $(\hat{G}, *)$ est un groupe abélien.

**Correction :**

1) Montrons qu'il existe une application $f_0 : G \to \mathbb{C}^*$ telle que :
$\forall x, y \in G,\ f_0(x+y) = f_0(x) \times f_0(y)$ *Mais on ne sait absolument rien sur $G$, comment faire ?*
Soit l'application constante $f_0 : G \to \mathbb{C}^*$ telle que : $\forall x \in G,\ f_0(x) = 1$ *On pense simple !*
D'où : $\forall x, y \in G,\ f_0(x+y) = 1$ et $f_0(x) \times f_0(y) = 1 \times 1 = 1$ *1, élément neutre de $(C^*, \times)$..*
Donc : $\forall x, y \in G,\ f_0(x+y) = f_0(x) \times f_0(y)$. Donc $f_0 \in \hat{G}$ et $\boxed{\hat{G} \text{ est non vide.}}$

2) Montrons que la loi $*$ est interne. Pour tous $f_1, f_2 \in \hat{G}$ :
$\forall x, y \in G,\ (f_1 * f_2)(x+y) = f_1(x+y)f_2(x+y)$ par définition de $*$. Donc :
$\forall x, y \in G,\ (f_1 * f_2)(x+y) = \big(f_1(x) \times f_1(y)\big)\big(f_2(x) \times f_2(y)\big)$ ($f_1$ et $f_2$ morphismes de groupes)
D'où : $\forall x, y \in G,\ (f_1 * f_2)(x+y) = f_1(x)f_1(y)f_2(x)f_2(y)$
D'autre part : $\forall x, y \in G, (f_1 * f_2)(x) \times (f_1 * f_2)(y) = f_1(x)f_2(x) \times f_1(y)f_2(y)$ par définition de $*$
On a donc : $\forall x, y \in G,\ (f_1 * f_2)(x+y) = (f_1 * f_2)(x) \times (f_1 * f_2)(y)$
Nous avons donc montré que pour tous $f_1,\ f_2 \in \hat{G},\ \ f_1 * f_2 \in \hat{G}$. La loi $*$ est donc interne.

Montrons que $*$ est associative. Pour tous $f_1, f_2, f_3 \in \hat{G}$ :
$\forall x \in G,\ \big((f_1 * f_2) * f_3\big)(x) = (f_1 * f_2)(x) \times f_3(x) = \big(f_1(x)f_2(x)\big)f_3(x) = f_1(x)\big(f_2(x)f_3(x)\big)$ par associativité du produit dans le gp multiplicatif $\mathbb{C}^*$
Donc : $\forall x \in G,\ \big((f_1 * f_2) * f_3\big)(x) = f_1(x) \times (f_2 * f_3)(x) = \big(f_1 * (f_2 * f_3)\big)(x)$
D'où : $\forall f_1, f_2, f_3 \in \hat{G},\ (f_1 * f_2) * f_3 = f_1 * (f_2 * f_3)$. La loi $*$ est donc associative.

Montrons l'existence dans $\hat{G}$ d'un élément neutre pour $*$. *Peut-être l'application mise en avant en 1)...*
Nous avons montré en 1) que l'application $f_0 : G \to \mathbb{C}^*$ telle que : $\forall x \in G,\ f_0(x) = 1$, est une application de $\hat{G}$.
Pour tout $f \in \hat{G}$, pour tout $x \in G$, $(f * f_0)(x) = f(x) \times f_0(x) = f(x) \times 1 = f(x)$. Donc $f * f_0 = f$.
De même, pour tout $x \in G$, $(f_0 * f)(x) = f_0(x) \times f(x) = 1 \times f(x) = f(x)$. Donc $f_0 * f = f$.
Donc $f_0$ est neutre dans $\hat{G}$ pour $*$.

Montrons que tout élément $f$ de $\hat{G}$ admet un inverse dans $\hat{G}$ pour $*$

*On cherche à établir l'existence de* $f^{-1} \in \hat{G}$ *tel que* $f * f^{-1} = f^{-1} * f = f_0$
*Autrement dit, tel que pour tout* $x \in G,\ f(x) \times f^{-1}(x) = f^{-1}(x) \times f(x) = f_0(x) = 1 \ldots$

Pour tout $f$ de $\hat{G}$, soit l'application $f' : G \to \mathbb{C}^*$ telle que pour tout $x \in G,\ f'(x) = \dfrac{1}{f(x)}$
($f'$ est bien définie car pour tout $x \in G, f(x) \in \mathbb{C}^*$)
$\forall x, y \in G,\ f'(x+y) = \dfrac{1}{f(x+y)} = \dfrac{1}{f(x)f(y)}$ (car $f$ morphisme de groupes)
$f'(x+y) = \dfrac{1}{f(x)} \times \dfrac{1}{f(y)} = f'(x) \times f'(y)$. Donc $f' \in \hat{G}$.
Et avec une telle application $f'$ :
$\forall x \in G,\ (f' * f)(x) = f'(x) \times f(x) = \dfrac{1}{f(x)} \times f(x) = 1 = f_0(x)$. Donc $f' * f = f_0$.
On montre de même : $f * f' = f_0$.
$f^{-1} = f'$ est donc l'inverse de $f$ dans $\hat{G}$ pour $*$.

Tout élément $f$ de $\hat{G}$ admet donc un inverse dans $\hat{G}$ pour $*$.

$\boxed{(\hat{G}, *) \text{ est donc un groupe.}}$. Par commutativité du produit dans $\mathbb{C}^*$, on conclut ce qui suit :

$\boxed{(\hat{G}, *) \text{ est un groupe commutatif, ou abélien.}}$