Inégalité de Hoeffding

Ayoub Hajlaoui

Amoureux du tréma, ta prétention faiblit :
cesse ton cinéma car ici point d'oubli.

Énoncé : (temps conseillé : 45 min) *d'après X ENS 2018, PC*

$(\Omega; A; P)$ désigne un espace probabilisé sur lequel seront définies les différentes variables aléatoires de l'énoncé. On admettra que toutes les variables aléatoires introduites peuvent bien être construites sur cet espace. On notera $P(E)$ la probabilité d'un événement E et $\mathbb{E}[X]$ l'espérance d'une variable aléatoire X sur $(\Omega; A; P)$ à valeurs réelles.

Soit n un entier strictement positif et soient n variables aléatoires $U_1, U_2, .., U_n$, indépendantes et suivant toute la loi uniforme sur $\{-1; 1\}$. On note $S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k$

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \ln\left(\mathbb{E}(e^{xU_1})\right)$.

1) Démontrer que pour tout entier naturel k : $2^k \times k! \leq (2k)!$

2) Établir, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'inégalité suivante : $\varphi(x) \leq \dfrac{x^2}{2}$. *On pourra introduire des séries...*

3) Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $x > 0$, on a l'inégalité : $P(S_n \geq t) \leq \exp\left(n\varphi(x) - xt\right)$

4) En déduire que : $\forall t > 0,\ P(S_n \geq t) \leq \exp\left(-\dfrac{t^2}{2n}\right)$. (C'est l'inégalité de Hoeffding pour S_n)

Correction :

1) *Une démonstration par récurrence est possible, mais pas nécessaire. Et si on peut éviter l'artillerie lourde...*

Pour $k = 0$: $2^0 \times 0! = 1 \times 1 = 1$ et $(2 \times 0)! = 0! = 1$. L'inégalité au sens large est bien vérifiée.

Pour $k \geq 1$: $(2k)! = k! \times \prod_{i=k+1}^{2k} i$, où chaque élément i du produit $\prod_{i=k+1}^{2k} i = (k+1) \times ... \times 2k$ est supérieur à 2.

Donc $(2k)! \geq k! \times 2^{2k-(k+1)+1} = k! \times 2^k$.

On a bien montré que $\boxed{\text{pour tout entier naturel } k : 2^k \times k! \leq (2k)!}$

2) *$\varphi(x)$ est bien défini pour tout réel x, puisque, pour tout réel x :*
- la variable aléatoire à valeurs réelles finies e^{xU_1} admet une espérance
- la v.a. e^{xU_1} est strictement positive donc $\mathbb{E}(e^{xU_1}) > 0$ (d'où l'existence de $\ln\left(\mathbb{E}(e^{xU_1})\right)$
Mais bon, l'énoncé nous dit lui-même que φ est définie sur $\mathbb{R}$...

Soit $x \in \mathbb{R}$. U_1 prend comme seules valeurs -1 et 1 (avec la même probabilité $\frac{1}{2}$).
D'après le théorème de transfert, $\mathbb{E}(e^{xU_1}) = e^{x\times 1} \times P(U_1 = 1) + e^{x\times(-1)} \times P(U_1 = -1)$. Donc $\mathbb{E}(e^{xU_1}) = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}$. Donc $\varphi(x) = \ln\left(\mathbb{E}(e^{xU_1})\right) = \ln\left(\frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}\right)$.

Il s'agit donc de montrer que pour tout réel x, $\frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} \leq e^{\frac{x^2}{2}}$

On veut montrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ \ln\left(\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2}e^{-x}\right) \leq \frac{x^2}{2}$. C'est-à-dire (par composition avec la fonction exp strictement croissante sur $\mathbb{R}$) : $\frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} \leq e^{\frac{x^2}{2}}$

Et soit on se lance dans une étude de fonction, soit - plus élégant - on se sert de l'indication de l'énoncé :

D'une part : $\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-x)^k}{k!}$ (cf série exponentielle)

$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^k}{k!}$ *Séparons la seconde série selon la parité de ses termes.*

$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}+\frac{1}{2}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{x^{2p}}{(2p)!}-\frac{1}{2}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}$ *(séparation licite car chacune des séries obtenue converge)*

$= \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{x^{2p}}{(2p)!} + \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{x^{2p}}{(2p)!} - \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}$

$= 2 \times \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{x^{2p}}{(2p)!}$. Donc $\boxed{\frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}}$

D'autre part : $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{\frac{x^2}{2}} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\frac{x^2}{2})^k}{k!}$ (toujours par définition de la série exponentielle).

Donc $\boxed{e^{\frac{x^2}{2}} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^{2k}}{2^k \times k!}}$

Or, d'après 1) : $\forall k \in \mathbb{N},\ 2^k \times k! \leq (2k)!$

Donc, par décroissance de la fonction inverse sur $]0\,;+\infty[$: $\forall k \in \mathbb{N},\ \frac{1}{2^k \times k!} \geq \frac{1}{(2k)!}$

Et, en multipliant par $x^{2k} \geq 0$: $\forall k \in \mathbb{N},\ \frac{x^{2k}}{2^k \times k!} \geq \frac{x^{2k}}{(2k)!}$

On a donc, pour tout réel x : $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^{2k}}{2^k \times k!} \geq \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}$.

Autrement dit : $\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} \leq e^{\frac{x^2}{2}}$. D'où (par croissance de ln sur $]0\,;+\infty[$) :

$\forall x \in \mathbb{R},\ \ln\left(\frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}\right) \leq \frac{x^2}{2}$. Autrement dit : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) \leq \frac{x^2}{2}}$

3) *On peut être tenté de penser à l'inégalité de Markov, mais elle n'est valable que pour les variables aléatoires positives (admettant une espérance), ce qui n'est pas le cas de S_n...*

$\forall x > 0 :\ P(S_n \geq t) = P(xS_n \geq tx) = P(e^{xS_n} \geq e^{tx})$ par stricte croissance de exp sur $\mathbb{R}$

On la tient, notre variable aléatoire positive ! Mais pourquoi avoir multiplié par x ? Puisqu'il va falloir faire apparaître du $\varphi(x)$, avec du x dans l'exposant de e...

e^{xS_n} est une variable aléatoire (strictement) positive, à valeurs réelles. $e^{xS_n}(\Omega)$ est fini. Donc e^{xS_n} admet bien une espérance. D'après l'inégalité de Markov :

$$P(e^{xS_n} \geq e^{tx}) \leq \frac{\mathbb{E}\left[e^{xS_n}\right]}{e^{tx}} = \frac{\mathbb{E}\left[\exp(x\sum_{k=1}^{n}U_k)\right]}{e^{tx}} = \frac{\mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{n}e^{xU_k}\right]}{e^{tx}}$$

Les variables aléatoires U_1, U_2,..,U_n sont indépendantes. Donc d'après le lemme des coalitions, les variables aléatoires e^{xU_1}, e^{xU_2},...,e^{xU_n} sont indépendantes.

D'où : $P(S_n \geq t) \leq \dfrac{\mathbb{E}[\prod_{k=1}^{n} e^{xU_k}]}{e^{tx}} = \dfrac{\prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}[e^{xU_k}]}{e^{tx}} = \dfrac{\left(\mathbb{E}[e^{xU_1}]\right)^n}{e^{tx}}$ (car les U_k ont la même loi)

Donc, par définition de φ : $P(S_n \geq t) \leq \dfrac{\left(e^{\varphi(x)}\right)^n}{e^{tx}} = \dfrac{e^{n\varphi(x)}}{e^{tx}} = \exp\left(n\varphi(x) - tx\right)$

On a donc, $\boxed{\text{pour tout } x > 0 : P(S_n \geq t) \leq \exp\left(n\varphi(x) - xt\right)}$

4) Soit $t > 0$. D'après 2), $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) \leq \dfrac{x^2}{2}$. Donc $n\varphi(x) - xt \leq n\dfrac{x^2}{2} - xt$, et, par croissance de exp :
$\exp\left(n\varphi(x) - xt\right) \leq \exp\left(n\dfrac{x^2}{2} - xt\right)$.

Donc d'après 3) : $\forall x > 0,\ P(S_n \geq t) \leq \exp\left(n\dfrac{x^2}{2} - xt\right) \quad (*)$

D'accord, mais il n'y a même plus de x dans le membre de droite de l'inégalité demandée ! Peut-être faut-il donc majorer $n\dfrac{x^2}{2} - xt$ par une quantité ne dépendant plus de x...

Pour $t > 0$ fixé, étudions les variations de $f_t : x \mapsto \dfrac{nx^2}{2} - xt$ sur $]0\,;+\infty[$.
f_t est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ car c'est une fonction polynomiale.
$\forall x > 0,\ f_t'(x) = nx - t$. Étudions son signe :
$f_t'(x) \geq 0 \Longleftrightarrow nx - t \geq 0 \Longleftrightarrow nx \geq t \Longleftrightarrow x \geq \dfrac{t}{n}$.
On en déduit que f_t' est positive sur $[\dfrac{t}{n}\,;+\infty[$ et négative sur $]\,0\,;\dfrac{t}{n}]$.
f_t est donc décroissante sur $]\,0\,;\dfrac{t}{n}]$ et croissante sur $[\dfrac{t}{n}\,;+\infty[$.
f_t admet donc comme minimum $f_t(\dfrac{t}{n}) = \dfrac{n(\frac{t}{n})^2}{2} - \dfrac{t}{n} \times t = \dfrac{t^2}{2n} - \dfrac{t^2}{n} = -\dfrac{t^2}{n}$

L'inégalité (*) est vraie pour tout réel $x > 0$. Elle est donc, en particulier, vraie pour $x = \dfrac{t}{n}$.
Elle donne alors : $P(S_n \geq t) \leq \exp\left(f_t(\dfrac{t}{n})\right)$.

On a bien montré que l'inégalité suivante est vraie : $\boxed{\forall t > 0,\ P(S_n \geq t) \leq \exp\left(-\dfrac{t^2}{2n}\right)}$