Inversibilité et diagonalisabilité d'une matrice aléatoire

Ayoub Hajlaoui

Aux taupins de combat, de défis assoiffés :
algèbre et puis proba, le tout dans vos cafés.

Énoncé : (temps conseillé : 30 min) *d'après agrégation externe spéciale 2019*

Soient X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et Y une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0\ ;1[$. X et Y sont indépendantes.

On considère la matrice aléatoire $A = \begin{pmatrix} X & X+Y-1 \\ 0 & Y-1 \end{pmatrix}$

1) Calculer la probabilité que A soit inversible.
2) Déterminer la loi de la variable aléatoire $\text{rg}(A)$.
3) Calculer la probabilité que A soit diagonalisable.

Correction :

1) A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$, c'est-à-dire si et seulement si l'événement $\big(X(Y-1) \neq 0\big)$ est réalisé.
$P\big(X(Y-1) \neq 0\big) = P\big((X \neq 0) \cap (Y-1 \neq 0)\big) = P(X \neq 0) \times P(Y \neq 1)$ par indép. de X et Y.
Donc : $P\big(X(Y-1) \neq 0\big) = \big(1 - P(X=0)\big) \times \big(1 - P(Y=1)\big) = \big(1 - \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!}\big)\big(1 - p(1-p)^{1-1}\big)$

$\boxed{\text{La probabilité que } A \text{ soit inversible est donc } (1-e^{-\lambda})(1-p)}$

2) A est une matrice de taille 2. Les valeurs possibles pour $\text{rg}(A)$ sont donc $0, 1$ et 2.

- $\text{rg}(A) = 2$ si et seulement si A est inversible. Donc $P\big(\text{rg}(A) = 2\big) = (1-e^{-\lambda})(1-p)$

- $\text{rg}(A) = 0$ si et seulement si A est la matrice nulle.
Donc $P\big(\text{rg}(A) = 0\big) = P\big((X=0) \cap (X+Y-1=0) \cap (Y-1=0)\big) = P\big((X=0) \cap (Y=1)\big)$
$= P(X=0) \times P(Y=1)$ par indépendance de X et Y. Donc $P\big(\text{rg}(A) = 0\big) = e^{-\lambda} \times p$
J'ai laissé la probabilité qui semblait la moins évidente à calculer pour la fin, pour la déduire à partir des autres

- On en conclut donc que $P\big(\text{rg}(A) = 1\big) = 1 - P\big(\text{rg}(A) = 0\big) - P\big(\text{rg}(A) = 2\big)$
$= 1 - e^{-\lambda} \times p - (1-e^{-\lambda})(1-p) = 1 - pe^{-\lambda} - 1 + p + e^{-\lambda} - pe^{-\lambda}$.
Donc $P\big(\text{rg}(A) = 1\big) = p + (1-2p)e^{-\lambda}$

3) *Déterminons une condition nécessaire et suffisante pour la diagonalisabilité de A...*
A est une matrice triangulaire supérieure. Ses valeurs propres sont donc ses éléments diagonaux.
Lorsque l'événement $(X \neq Y-1)$ est réalisé, A admet deux valeurs propres distinctes, et est donc diagonalisable.
Lorsque l'événement $(X = Y-1)$ est réalisé, la matrice A admet une seule valeur propre. Si l'événement $(X+Y-1=0)$ est réalisé, A est diagonale donc diagonalisable. Lorsque l'événement

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com

$(X = Y - 1) \cap (X + Y - 1 = 0)$ est réalisé, A est donc bien diagonalisable.

Résultat utile à connaître, et à savoir démontrer rapidement : une matrice non diagonale qui n'a qu'une valeur propre n'est pas diagonalisable.
Lorsque l'événement $(X = Y - 1) \cap (X + Y - 1 \neq 0)$ est réalisé : A a une unique valeur propre λ mais n'est pas diagonale.
Si A était diagonalisable, il existerait une matrice P inversible et une matrice $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ telles que $A = PDP^{-1}$. Mais $D = \lambda I_2$, d'où $A = P \times \lambda I_2 \times P^{-1} = \lambda PP^{-1} = \lambda I_2 = D$. Impossible car A n'est pas diagonale !
Donc lorsque l'événement $(X = Y - 1) \cap (X + Y - 1 = 0)$ est réalisé, A n'est pas diagonalisable.

Nous pouvons récapituler ainsi :
$P\big(\text{« } A \text{ est diagonalisable »}\big) = P\Big(\big(X \neq Y - 1\big) \bigcup \big((X = Y - 1) \cap (X + Y - 1 = 0)\big) \Big)$
$= P\big(X \neq Y - 1\big) + P\big((X = Y - 1) \cap (X + Y - 1 = 0)\big)$ par union d'événements incompatibles
$= 1 - P\big(X = Y - 1\big) + P\big((X = Y - 1) \cap (2X = 0)\big)$
$= 1 - P\big(X = Y - 1\big) + P\big(Y = 1\big) \times P\big(X = 0)$ par indépendance de X et Y
$= 1 - P\big(X = Y - 1\big) + pe^{-\lambda}$ (cf calcul de $P\big(\mathrm{rg}(A) = 0\big)$ à la question 2)

Calculons maintenant $P(X = Y - 1)$. En appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'événements associé à la variable aléatoire Y, on obtient :
$P(X = Y - 1) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P\big((X = Y - 1) \cap (Y = k)\big) = \sum_{k=1}^{+\infty} P\big((X = k - 1) \cap (Y = k)\big)$
$= \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P\big(X = k - 1\big) \times P\big(Y = k\big)$ par indépendance de X et Y
$= \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \times p(1-p)^{k-1} = pe^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\big((1-p)\lambda\big)^{k-1}}{(k-1)!} = pe^{-\lambda} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\big((1-p)\lambda\big)^{i}}{i!}$ (changement d'indice $i = k - 1$)

$= pe^{-\lambda} e^{(1-p)\lambda} = pe^{-\lambda + \lambda - p\lambda} = pe^{-p\lambda}$

Finalement : $P\big(\text{« } A \text{ est diagonalisable »}\big) = 1 - pe^{-p\lambda} + pe^{-\lambda}$

$\boxed{\text{La probabilité que } A \text{ soit diagonalisable est donc } 1 + p(e^{-\lambda} - e^{-p\lambda})}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com