Isomorphisme d'un espace matriciel vers son dual

Ayoub Hajlaoui

Tout un peuple alité de Dax à Épinal ;
étudions quant à nous l'espace et son dual.

Énoncé : (temps conseillé : 25 min)

Soit n un entier naturel non nul. Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, pour tous entiers i et j de $[\![1;n]\!]$, on note $M_{i,j}$ le coefficient de M à la i-ème ligne et j-ième colonne.
Pour tous a et b de $[\![1;n]\!]$, on note $E^{a,b}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui à la a-ième ligne et b-ième colonne, qui vaut 1.
Enfin, si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, on note $E^* = \mathcal{L}\big(E, \mathbb{R}\big)$ l'ensemble des formes linéaires sur E, appelé aussi dual de E.

1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer, pour tous entiers a et b de $[\![1;n]\!]$, la matrice $AE^{a,b}$

2) Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note f_A l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ qui, à toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, associe $f_A(M) = \text{Tr}(AM)$.
On note Φ l'application qui, à toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, associe $\Phi(A) = f_A$.
Montrer que Φ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers $\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\big)^*$

Correction :

1) Soient a et b deux entiers de $[\![1;n]\!]$. Posons $C = AE^{a,b}$.

Pour tous i et j de $[\![1;n]\!]$, $C_{i,j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} A_{i,k}E^{a,b}_{k,j}$.

Si $j \neq b$: pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $E^{a,b}_{k,j} \neq 0$. D'où, par somme d'éléments nuls : $C_{i,j} = 0$.
Autrement dit, toutes les colonnes de $AE^{a,b}$ autres que la b-ième sont nulles.

Si $j = b$: $C_{i,b} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} A_{i,k}E^{a,b}_{k,b} = A_{i,a}E^{a,b}_{a,b} = A_{i,a}$

Autrement dit, la b-ième colonne de $AE^{a,b}$ est égale à la a-ième colonne de A.

$AE^{a,b}$ est donc la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont toutes les colonnes sont nulles, sauf la b-ième qui est égale à la a-ième colonne de A.

2) Montrons d'abord que pour tout A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\Phi(A) \in \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\big)^*$ (c'est-à-dire que $\Phi(A) = f_A$ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a :
$\forall\ M_1, M_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall \lambda \in \mathbb{R},\ f_A(M_1 + \lambda M_2) = \text{Tr}\big(A(M_1 + \lambda M_2)\big) = \text{Tr}\big(AM_1 + \lambda AM_2\big)$
$= \text{Tr}(AM_1) + \lambda \text{Tr}(AM_2)$ par linéarité de la trace
$= f_A(M_1) + \lambda f_A(M_2)$. Et : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R},\ f_A(M) \in \mathbb{R}$
On a donc montré : pour tout A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f_A = \Phi(A) \in \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\big)^*$.
Φ est donc bien une application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers $\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\big)^*$

Montrons maintenant que Φ est linéaire.
Quoi ? Ne l'avons-nous pas déjà fait plus haut ? Non non, nous avons juste montré que pour tout A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, f_A est une forme linéaire. Nous nous sommes donc, pour l'instant, prononcé sur les images de f_A, et non sur f_A elle-même.

Pour tous $A_1, A_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\Phi(A_1 + \lambda A_2) = f_{A_1+\lambda A_2}$.
Or, pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f_{A_1+\lambda A_2}(M) = \mathrm{Tr}\big((A_1+\lambda A_2)M\big) = \mathrm{Tr}\big(A_1 M\big) + \lambda \mathrm{Tr}\big(A_2 M\big)$
Donc, pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f_{A_1+\lambda A_2}(M) = f_{A_1}(M) + \lambda f_{A_2}(M)$.
D'où : $f_{A_1+\lambda A_2} = f_{A_1} + \lambda f_{A_2}$. Autrement dit : $\Phi(A_1 + \lambda A_2) = \Phi(A_1) + \lambda\Phi(A_2)$
L'application Φ est donc linéaire.

Montrons enfin que Φ est bijective.

Un réflexe intelligent : voir si les dimensions des espaces de départ et d'arrivée sont égales... Rappelons que lorsque E et F sont deux espaces vectoriels de dimensions finies :
$\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim E \times \dim F$

$\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\big)^*$ où $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\big)^*$ sont de dimension finie. $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = n^2$
Et $\dim \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\big)^* = \dim \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\big)^* = \dim \mathcal{L}\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R}\big) = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \dim \mathbb{R} = n^2 \times 1 = n^2$
$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\big)^*$ sont donc deux espaces vectoriels de même dimension finie n^2.
Il suffit donc de montrer que l'application linéaire Φ est injective (c'est-à-dire, puisqu'elle est linéaire, que son noyau est réduit au vecteur nul de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) pour montrer qu'elle est bijective.

Soit $A \in \mathrm{Ker}\ \Phi$, c'est-à-dire telle que $\Phi(A) = 0_{\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right)^*}$ (la forme linéaire nulle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$)
On a donc : pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{Tr}(AM) = 0$. (*)

Comment, à partir de cette information, montrer que A est la matrice nulle ? L'égalité qui nous est fournie est valable pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Utilisons-la donc sur une ou des matrices M bien choisies...

D'après 1)a), pour tous entiers i et j de $[\![1; n]\!]$, $AE^{i,j}$ est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont toutes les colonnes sont nulles, sauf la j-ième colonne qui est égale à la i-ième colonne de A.

$$AE^{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & 0\dots & a_{1,i} & \dots 0 \\ 0 & 0\dots & a_{2,i} & \dots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0\dots & a_{n,i} & \dots 0 \end{pmatrix} \text{ où } \begin{pmatrix} a_{1,i} \\ a_{2,i} \\ \vdots \\ a_{n,i} \end{pmatrix} \text{ est la } j\text{-ième colonne de } AE^{i,j}$$

Le seul élément diagonal éventuellement non nul de $AE^{i,j}$ est donc l'élément à la j-ème ligne et j-ème colonne de $AE^{i,j}$, et cet élément est $a_{j,i}$.
Donc $\mathrm{Tr}(AE^{i,j}) = a_{j,i}$. Or, d'après (*), $\mathrm{Tr}(AE^{i,j}) = 0$. Donc $a_{j,i} = 0$
Cela étant valable pour tous entiers i et j de $[\![1; n]\!]$, on en déduit que la matrice A est nulle.
D'où : $\mathrm{Ker}\ \Phi = \{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\}$, et l'application Φ est injective.
Comme justifié plus haut, Φ est donc bijective.

$\boxed{\Phi \text{ est donc bien un isomorphisme de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ vers } \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\big)^*}$

Notez qu'on aurait pu montrer l'injectivité de Φ sans nous servir de la 1). Pour A dans $\mathrm{Ker}\ \Phi$, on a en particulier (en choisissant $M = {}^tA$) $Tr(A\,{}^tA) = 0$. Et :
- soit vous savez que $\varphi : (A, B) \mapsto Tr({}^tAB)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, auquel cas vous en concluez, de par le caractère défini du produit scalaire, que ${}^tA = 0$ et donc $A = 0$
- soit vous vous rendez compte, en calculant les coefficients de $A\,{}^tA$ (en fonction de ceux de A) puis sa trace que, par somme nulle de carrés, tous les coefficients de A sont nuls
Mais attention, cela n'est pas valable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$! $\varphi : (A, B) \mapsto Tr({}^tAB)$ n'est pas un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Il n'est pas défini positif. Et oui, sur $\mathbb{C}$, une somme de carrés peut être nulle sans que les termes de la somme ne soient nuls...
Sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on peut soit s'en tenir à la méthode de l'énoncé, soit choisir $M = {}^t\overline{A}$...