Loi des poissons

Ayoub Hajlaoui

Debout lutte après lutte. Pourquoi vivrions-nous
si atteindre son but se faisait sans remous ?

Cet exercice est déstabilisant, notamment pour les élèves habitués à des énoncés « classiques » en probabilités. La question 5 est vraiment difficile. Mais les questions qui la précèdent sont à portée de tout élève de Terminale S, à condition qu'il connaisse bien son cours et garde la tête froide devant des questions relativement inhabituelles. Voir cet article pour mieux comprendre l'intérêt de « s'habituer à la surprise ».

Énoncé : (temps conseillé : 1 heure 15 minutes)

On rappelle que pour tout entier naturel n non nul, $n! = 1 \times 2 \times ... \times n$.
Ainsi, $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$... Et par convention, $0! = 1$
Soit x un réel strictement positif.

Le vieux Santiago part à la pêche aux poissons. Il peut choisir soit de pêcher dans le port, soit de prendre le large pour pêcher dans le Gulf Stream. Soit X le nombre de poissons qu'il ramène de sa pêche. X est une variable aléatoire qui peut prendre comme valeur n'importe quel entier naturel, selon les règles suivantes :
- si Santiago choisit de pêcher dans le port : pour tout entier naturel k, la probabilité qu'il ramène k poissons est $\dfrac{e^{-2x} \times (2x)^k}{k!}$
- s'il choisit de pêcher dans le Gulf Stream : pour tout entier naturel k, la probabilité qu'il ramène k poissons est $\dfrac{e^{-x} \times x^k}{k!}$

Soit G l'événement : « Santiago choisit de pêcher dans le Gulf Stream ». On pose $P(G) = \dfrac{1}{4}$

1) Montrer que la probabilité que Santiago revienne bredouille de sa pêche est $\dfrac{1}{4}\left(3\mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^{-x}\right)$

2) Montrer qu'il existe une unique valeur de x pour laquelle cette probabilité est égale à $\dfrac{1}{2}$

3)a) Santiago veut pêcher exactement trois poissons (ni plus, ni moins). Pour quelle valeur de x n'a-t-il aucune raison de préférer l'un ou l'autre des lieux de pêche ? On la notera x_3.

b) Pour tout entier naturel non nul n, on note x_n la valeur de x pour laquelle Santiago est indifférent quant au choix du lieu de pêche, lorsqu'il veut pêcher exactement n poissons. Montrer que (x_n) est une suite arithmétique et préciser sa raison.

4) Soit $x > 0$. Déterminer $\lim\limits_{k \to +\infty} \dfrac{P_G(X = k)}{P_{\overline{G}}(X = k)}$

5) On admettra le résultat suivant : pour tout réel a, $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} = e^a$

Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \times \frac{e^{-x} \times x^k}{k!}$, et interpréter le résultat.

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com

Correction :

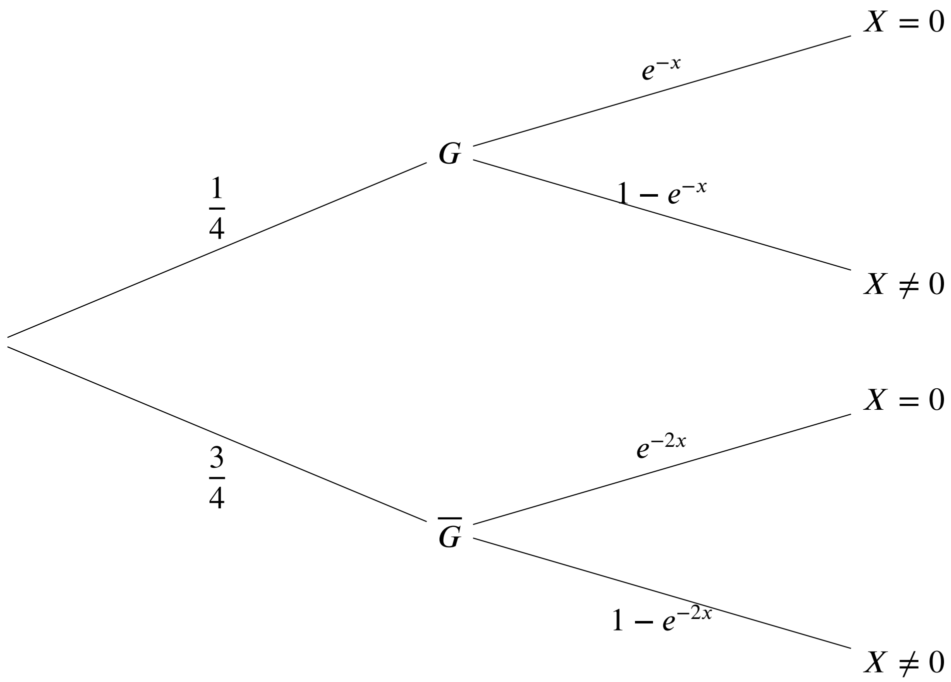
1) *Revenir bredouille de sa pêche, c'est n'avoir pêché aucun poisson. L'événement correspondant est donc « $X = 0$ ». Mais la probabilité de pêcher ou pas un poisson dépend du choix du lieu de pêche...*

D'après l'énoncé :

- si Santiago choisit de pêcher dans le port, la probabilité qu'il ramène 0 poisson est $\dfrac{e^{-2x} \times (2x)^0}{0!}$
Attention à bien remplacer k (et non x) par 0.
Donc $P_{\overline{G}}(X = 0) = \dfrac{e^{-2x} \times (2x)^0}{0!} = \dfrac{e^{-2x} \times 1}{1} = e^{-2x}$ *(Rappelons $a^0 = 1$ pour tout réel a, et $0! = 1$)*

- si Santiago choisit de pêcher dans le Gulf Stream, la probabilité qu'il ramène 0 poisson est $\dfrac{e^{-x} \times (x)^0}{0!} = e^{-x}$. Donc $P_G(X = 0) = e^{-x}$

Pour y voir plus clair, on peut s'aider de l'arbre suivant, même si ce n'est pas nécessaire :



$\{G, \overline{G}\}$ est une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :
$P(X = 0) = P\big(G \cap (X = 0)\big) + P\big(\overline{G} \cap (X = 0)\big)$.
Et d'après la formule des probabilités conditionnelles :
$P(X = 0) = P(G) \times P_G(X = 0) + P(\overline{G}) \times P_{\overline{G}}(X = 0)$. Donc : $P(X = 0) = \dfrac{1}{4} \times e^{-x} + \dfrac{3}{4} \times e^{-2x}$

D'où : $P(X = 0) = \dfrac{1}{4}(3e^{-2x} + e^{-x})$.

$\boxed{\text{La probabilité que Santiago revienne bredouille de sa pêche est donc bien } \frac{1}{4}\left(3\mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^{-x}\right)}$

2) On cherche à démontrer l'existence d'un unique $x_0 \in \,]0\,;\,+\infty[$ (l'énoncé indique $x > 0$) tel que $\dfrac{1}{4}\left(3\mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^{-x}\right) = \dfrac{1}{2}$ *Le corollaire du TVI n'est pas loin...*

Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{4}\left(3\mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^{-x}\right)$

f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ par composée et somme de fonctions dérivables.

Pour tout $x \in \,]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1}{4}\left(-6e^{-2x} - e^{-x}\right) = -\dfrac{1}{4}\left(6e^{-2x} + e^{-x}\right) < 0$ (car $\exp > 0$ sur $\mathbb{R}$)

f est donc strictement décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

De plus, f est continue (car dérivable) sur $]0\,;\,+\infty[$.

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com

Enfin : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{4}\left(3e^0+e^0\right) = \frac{1}{4}\times 4 = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{4}\left(3(\frac{1}{e^x})^2+\frac{1}{e^x}\right) = 0$ par quotient, produit et somme de limites.

Et $\frac{1}{2} \in]0\ ;\ 1[$.

Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution sur $]0\ ;\ +\infty[$.

Autrement dit, $\boxed{\text{il existe une unique valeur de } x > 0 \text{ pour laquelle } \frac{1}{4}\left(3\mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^{-x}\right) = \frac{1}{2}}$

3)a) Pour que Santiago n'ait aucune raison de préférer le port ou le Gulf Stream, la probabilité de pêcher trois poissons sachant qu'il a choisi le port doit être la même que la probabilité de pêcher trois poissons sachant qu'il a choisi le Gulf Stream.

On cherche donc une valeur $x_3 > 0$ de x tel que $P_G(X=3) = P_{\overline{G}}(X=3)$.

$P_G(X=3) = P_{\overline{G}}(X=3) \iff \frac{e^{-x}\times x^3}{3!} = \frac{e^{-2x}\times(2x)^3}{3!} \iff e^{-x}\times x^3 = e^{-2x}\times(2x)^3$

$\iff e^{-x}\times x^3 = e^{-2x}\times 8x^3 \iff e^{-x} = 8e^{-2x}$ (car $x \neq 0$)

$\iff \frac{e^{-x}}{e^{-2x}} = 8 \iff e^{-x+2x} = 8 \iff e^x = 8 \iff x = \ln(8)$. $\boxed{\text{Donc } x_3 = \ln(8)}$

3)b) De même qu'en 3)a) : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, x_n est solution de l'équation $P_G(X=n) = P_{\overline{G}}(X=n)$

$P_G(X=n) = P_{\overline{G}}(X=n) \iff \frac{e^{-x}\times x^n}{n!} = \frac{e^{-2x}\times(2x)^n}{n!} \iff e^{-x}\times x^n = e^{-2x}\times(2x)^n$

$\iff e^{-x}\times x^n = e^{-2x}\times 2^n x^n \iff e^{-x} = 2^n e^{-2x}$ (car $x \neq 0$)

$\iff \frac{e^{-x}}{e^{-2x}} = 2^n \iff e^x = 2^n \iff x = \ln(2^n)$. Donc pour tout entier naturel non nul n, $x_n = n\ln(2)$

$\boxed{(x_n) \text{ est donc une suite arithmétique de raison } \ln(2).}$

Rappelons qu'une suite de terme général $u_n = an+b$ est arithmétique de raison a (résultat qui se retrouve facilement en calculant $u_{n+1}-u_n$)

4) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{P_G(X=k)}{P_{\overline{G}}(X=k)} = \frac{\frac{e^{-x}\times x^k}{k!}}{\frac{e^{-2x}\times(2x)^k}{k!}} = \frac{e^{-x}\times x^k}{k!}\times\frac{k!}{e^{-2x}\times(2x)^k} = \frac{e^{-x}\times x^k}{e^{-2x}\times(2x)^k}$

Donc $\frac{P_G(X=k)}{P_{\overline{G}}(X=k)} = \frac{e^{-x+2x}\times x^k}{2^k x^k} = \frac{e^x}{2^k}$

On s'intéresse maintenant à la limite de cette quantité lorsque k tend vers $+\infty$. Le seul piège ici, ce serait d'oublier que e^x n'est qu'une constante (puisque c'est k et non x qu'on fait tendre vers $+\infty$), et de prêter à e^x une limite infinie qu'il ne mérite pas...

$2 > 1$ donc $\lim\limits_{k\to+\infty} 2^k = +\infty$. Par quotient de limites, on obtient : $\lim\limits_{k\to+\infty}\frac{e^x}{2^k} = 0$.

D'où : $\boxed{\lim\limits_{k\to+\infty}\frac{P_G(X=k)}{P_{\overline{G}}(X=k)} = 0}$

5) *Rappelons : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,* $\sum\limits_{k=0}^{n} k\times\frac{e^{-x}\times x^k}{k!} = 0\times\frac{e^{-x}\times x^0}{0!} + 1\times\frac{e^{-x}\times x^1}{1!} + \ldots + n\times\frac{e^{-x}\times x^n}{n!}$

Remarquons déjà : pour tout entier naturel n non nul : $\sum\limits_{k=0}^{n} k\times\frac{e^{-x}\times x^k}{k!} = \sum\limits_{k=1}^{n} k\times\frac{e^{-x}\times x^k}{k!}$

(car pour $k=0$: $0\times\frac{e^{-x}\times x^0}{0!} = 0$)

Pour tout entier naturel k non nul, $k\times\frac{e^{-x}\times x^k}{k!} = k\times\frac{e^{-x}\times x^k}{(k-1)!\times k}$

En effet, $k! = (k-1)!\times k$ car :

- si $k \geq 2$, $k!$ est le produit des entiers naturels de 1 jusqu'à k, et $(k-1)!$ le produit des entiers naturels de 1 jusqu'à $k-1$
- et si $k=1$, on a $k! = 1! = 1$ et $(k-1)! \times k = 0! \times 1 = 1 \times 1 = 1$ donc l'égalité reste valable

Donc pour tout entier naturel k non nul, $k \times \dfrac{e^{-x} \times x^k}{k!} = \dfrac{e^{-x} \times x^k}{(k-1)!}$

D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \times \frac{e^{-x} \times x^k}{k!} = \sum_{k=1}^{n} k \times \frac{e^{-x} \times x^k}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{-x} \times x^k}{(k-1)!}$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{-x} \times x^k}{(k-1)!} = \frac{e^{-x} \times x^1}{(1-1)!} + \frac{e^{-x} \times x^2}{(2-1)!} + \ldots + \frac{e^{-x} \times x^n}{(n-1)!} = \frac{e^{-x} \times x^1}{0!} + \frac{e^{-x} \times x^2}{1!} + \ldots + \frac{e^{-x} \times x^n}{(n-1)!}$$

$= \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{-x} \times x^{k+1}}{k!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{-x} \times x^k \times x}{k!} = xe^{-x} \times \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}$ *(on a factorisé par xe^{-x}, qui était présent dans chaque terme de la somme, et qui ne dépend pas de k)*

Voilà, maintenant, on va pouvoir utiliser le résultat donné par l'énoncé...

D'où : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} k \times \frac{e^{-x} \times x^k}{k!} = \lim_{n \to +\infty} xe^{-x} \times \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}$

Or, d'une part $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x$ d'après l'énoncé.
Et d'autre part, xe^{-x} est constant (ne dépend pas de n).

Donc, par produit de limites : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} xe^{-x} \times \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} = xe^{-x} \times e^x = xe^{-x+x} = x$

Finalement : $\boxed{\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} k \times \frac{e^{-x} \times x^k}{k!} = x}$

Quelle interprétation donner à un tel résultat dans le contexte de l'exercice ?

On a en fait montré : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} k \times P_G(X=k) \quad = \quad x$

Rappelons que pour une variable aléatoire Y pouvant prendre comme valeurs $0, 1, 2, \ldots, n$, l'espérance de Y est définie par $E(Y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \times P(Y=k)$. Par analogie (dont je suis bien conscient qu'elle est à la limite de votre programme), lorsque Y prend comme valeurs tous les entiers naturels : $E(Y) = \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} k \times P(Y=k)$

S'il part pêcher dans le Gulf Stream, Santiago pêchera en moyenne x poissons.

Oui, s'il part pêcher dans le Gulf Stream, puisque les probabilités qu'on a dans la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \times P_G(X=k)$ sont conditionnées par G.