Polynôme d'interpolation de Hermite

Ayoub Hajlaoui

Ni jardins ni ciné car la ville est en berne :
Hermite est confiné dans sa jolie caverne.

Énoncé : (temps conseillé : 25 min) *D'après CCP MP 2016*

Soit p un entier naturel non nul. Soient $x_1, x_2, ..., x_p$, p réels deux à deux distincts.

1) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a \in \mathbb{R}$. Démontrer que si $P(a) = P'(a) = 0$, alors $(X-a)^2$ divise P.

2) Soient $2p$ réels quelconques $a_1, a_2, ...a_p$, $b_1, b_2, ...b_p$.
Démontrer qu'il existe un unique polynôme $P_H \in \mathbb{R}_{2p-1}[X]$ tel que, pour tout entier i vérifiant $1 \le i \le p$, on a $P_H(x_i) = a_i$ et $P'_H(x_i) = b_i$
On pourra poser une certaine application φ de $\mathbb{R}_{2p-1}[X]$ vers $\mathbb{R}^{2p}$

Correction :

1) *Le résultat qu'on demande de démontrer est un résultat de cours (ou d'application immédiate du cours) pour la plupart d'entre vous (cf ordre de multiplicité d'une racine).*
Du $P(a)$, du $P'(a)$ et du $(X-a)^2$... Comment tous ces indices pourraient-ils ne pas vous faire penser à une formule de Taylor ?
P est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ car c'est un polynôme. On peut donc, en particulier, lui appliquer la formule de Taylor avec reste intégrale en a à n'importe quel ordre.

Oui mais quel ordre choisir ? P est un polynôme donc ses dérivées successives sont nulles à partir d'un certain rang... N'oublions pas de distinguer le cas $P = 0$, et allons-y !

Si P est le polynôme nul, $P = (X-a)^2 P$ donc $(X-a)^2$ divise P (et ce pour tout réel a).
En particulier, l'implication « $P(a) = P'(a) = 0 \Longrightarrow (X-a)^2$ divise P »est vraie pour $P = 0$.

Si $P \neq 0$, en notant n le degré de P, $n \ge 0$. Pour $x \in \mathbb{R}$, appliquons la formule de Taylor avec reste intégrale à l'ordre n au segment $[a\,;x]$. Elle donne :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!} + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} P^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!} \text{ car } P^{(n+1)} = 0$$

(Dérivée $(n+1)$-ème d'un polynôme de degré n..)

Autrement dit : $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)(X-a)^k}{k!}$

Avec $P(a) = 0$ et $P'(a) = 0$: $P = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{P^{(k)}(a)(X-a)^k}{k!}$ si P est de degré $n \ge 2$, et $P = 0$ sinon.

Si $n \ge 2$, on a alors : $P = (X-a)^2 \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{P^{(k)}(a)(X-a)^{k-2}}{k!}$ où $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{P^{(k)}(a)(X-a)^{k-2}}{k!}$ est bien un polynôme (pour $k \ge 2, k-2 \ge 0$). Donc $(X-a)^2$ divise P. Et ce résultat reste valable si $P = 0$.

On a bien montré : $\boxed{\forall P \in \mathbb{R}[X] \text{ et } a \in \mathbb{R}, \text{ si } P(a) = P'(a) = 0, \text{ alors } (X-a)^2 \text{ divise } P.}$

2) Soit φ l'application de $\mathbb{R}_{2p-1}[X]$ vers $\mathbb{R}^{2p}$ définie par

$$\varphi(P) = \left(P(x_1), P(x_2), ..., P(x_p), P'(x_1), P'(x_2), ..., P'(x_p)\right)$$

On veut en fait montrer qu'il existe un unique polynôme $P_H \in \mathbb{R}_{2p-1}[X]$ tel que
$\varphi(P_H) = \left(a_1, a_2, ..., a_p, b_1, b_2, ..., b_p\right)$

Montrons donc que φ est bijective.

Montrons que φ est injective et surjective. Mais dans certains cas, l'un des deux suffit...

Pour tous P et $Q \in \mathbb{R}_{2p-1}[X]$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$: $\varphi(P + \lambda Q)$
$= \left((P + \lambda Q)(x_1), (P + \lambda Q)(x_2), ..., (P + \lambda Q)(x_p), (P + \lambda Q)'(x_1), (P + \lambda Q)'(x_2), ..., (P + \lambda Q)'(x_p)\right)$
$= \left(P(x_1), P(x_2), ..., P(x_p), P'(x_1), P'(x_2), ..., P'(x_p)\right) + \lambda\left(Q(x_1), Q(x_2), ..., Q(x_p), Q'(x_1), Q'(x_2), ..., Q'(x_p)\right)$
$= \varphi(P) + \lambda\varphi(Q)$.
Donc φ est une application linéaire de $\mathbb{R}_{2p-1}[X]$ vers $\mathbb{R}^{2p}$.

Montrons que l'application linéaire φ est injective. Soit $P \in \mathbb{R}_{2p-1}[X]$.
Si $\varphi(P) = 0$, on a, pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq p$: $P(x_i) = 0$ et $P'(x_i) = 0$.
Donc, d'après 1), pour tout $i \in [\![1; p]\!]$, x_i est une racine de P, d'ordre de multiplicité supérieur ou égal à 2.
Et les x_i sont 2 à 2 distincts.
Rappelons que pour $n \in \mathbb{N}^*$, si un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ admet n racines réelles distinctes $\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n$, d'ordres de multiplicités respectifs $\beta_1, \beta_2, .., \beta_n$, alors $\prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i)^{\beta_i}$ divise P

Donc le polynôme $\prod_{i=1}^{p} (X - x_i)^2$ divise P.

$\prod_{i=1}^{p} (X - x_i)^2$ est de degré $2p$. Donc, soit P est de degré supérieur ou égal à $2p$, soit P est le polynôme nul. Mais $P \in \mathbb{R}_{2p-1}[X]$, donc P ne peut être de degré supérieur ou égal à $2p$. Donc P est le polynôme nul.
Donc $\mathrm{Ker}\varphi = \{0\}$, et φ est injective.

φ est une application linéaire injective de $\mathbb{R}_{2p-1}[X]$ vers $\mathbb{R}^{2p}$. Ces deux espaces vectoriels sont de dimensions finies et égales ($\dim \mathbb{R}_{2p-1}[X] = \dim \mathbb{R}^{2p} = 2p$).
L'injectivité de φ entraîne donc sa bijectivité.

φ est donc un isomorphisme de $\mathbb{R}_{2p-1}[X]$ vers $\mathbb{R}^{2p}$.

Il donc existe un unique polynôme $P_H \in \mathbb{R}_{2p-1}[X]$ tel que $\varphi(P_H) = \left(a_1, a_2, ..., a_p, b_1, b_2, ..., b_p\right)$.

Finalement, il existe bien un unique polynôme $P_H \in \mathbb{R}_{2p-1}[X]$ tel que, pour tout entier i vérifiant $1 \leq i \leq p$, on a $P_H(x_i) = a_i$ et $P'_H(x_i) = b_i$

P_H est appelé polynôme d'interpolation de Hermite.