Somme de cosinus

Ayoub Hajlaoui

Cet énoncé te prend gentiment par la main,
main qu'enfin tu reprends tout au bout du chemin.

Énoncé : (temps conseillé : 1 heure)

Soit θ un nombre réel dans l'intervalle $]0\ ;\ 2\pi[$, et soit n un entier naturel non nul. Le but de cet exercice est d'exprimer plus simplement la somme $S = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = \cos(0) + \cos(\theta) + \cos(2\theta) + ... + \cos(n\theta)$

1) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Que vaut $\text{Re}(e^{i\alpha})$? ($\text{Re}(z)$ désignant la partie réelle de z)

2) Montrer par récurrence que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, pour tous nombres complexes $z_0, z_1, ...z_N$, l'égalité suivante est vraie : $\sum_{k=0}^{N} \text{Re}(z_k) = \text{Re}\left(\sum_{k=0}^{N} z_k\right)$

3) Soit $q \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$. Rappeler l'expression de $\sum_{k=0}^{n} q^k = q^0 + q^1 + ... + q^n$.
On admettra dans la suite du problème que le résultat obtenu est valable pour $q \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$.

4)a) Montrer que pour tout réel α, $\sin(\alpha) = \dfrac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$
b) En déduire que pour tout réel α, l'égalité suivante est vraie : $1 - e^{i\alpha} = -2i \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \times e^{i\frac{\alpha}{2}}$
C'est ce qu'on appelle la technique de l'angle moitié.

5) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\text{Re}(az) = a\text{Re}(z)$

6) À l'aide des questions précédentes - et d'une bonne dose de courage - montrer que :

$$S = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

Correction :

1) Par définition, $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$. Donc $\boxed{\text{Re}(e^{i\alpha}) = \cos\alpha}$

2) *Certains d'entre vous ont dû voir ce résultat tel quel dans le cours, auquel cas ce qui suit est une démo de cours.*

Montrons par récurrence sur N : $\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \forall\ z_0\ ,\ z_1, ...z_N \in \mathbb{C},\ \sum_{k=0}^{N} \text{Re}(z_k) = \text{Re}\left(\sum_{k=0}^{N} z_k\right)$

<u>Initialisation :</u> pour $N = 1$: pour tous complexes z_0 et z_1, $\sum_{k=0}^{1} \text{Re}(z_k) = \text{Re}(z_0) + \text{Re}(z_1)$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com

Or, $\mathrm{Re}(z_0)+\mathrm{Re}(z_1)=\mathrm{Re}(z_0+z_1)=\mathrm{Re}\big(\sum_{k=0}^{1} z_k\big)$. Donc : $\forall z_0,\ z_1\in\mathbb{C},\ \sum_{k=0}^{N}\mathrm{Re}(z_k)=\mathrm{Re}\big(\sum_{k=0}^{N} z_k\big)$

La propriété est initialisée au rang 1.

Hérédité : Supposons que pour un certain $N\geq 1$, $\forall\ z_0, z_1, \dots z_N\in\mathbb{C}$, $\sum_{k=0}^{N}\mathrm{Re}(z_k)=\mathrm{Re}\big(\sum_{k=0}^{N} z_k\big)$.

Et montrons : $\forall\ z_0,\ z_1,\dots z_{N+1}\in\mathbb{C},\ \sum_{k=0}^{N+1}\mathrm{Re}(z_k)=\mathrm{Re}\big(\sum_{k=0}^{N+1} z_k\big)$

$\sum_{k=0}^{N+1}\mathrm{Re}(z_k)=\big(\sum_{k=0}^{N}\mathrm{Re}(z_k)\big)+\mathrm{Re}(z_{N+1})=\mathrm{Re}\big(\sum_{k=0}^{N} z_k\big)+\mathrm{Re}(z_{N+1})$ par hypothèse de récurrence.

Et alors ? Et alors, on se retrouve avec une somme de (seulement) deux parties réelles...

Donc $\sum_{k=0}^{N+1}\mathrm{Re}(z_k)=\mathrm{Re}\big(\sum_{k=0}^{N} z_k\ +\ z_{N+1}\big)=\mathrm{Re}\big(\sum_{k=0}^{N+1} z_k\big)$. La propriété est donc héréditaire.

Conclusion : Le principe de raisonnement par récurrence nous permet de conclure ce qui suit :

pour tout $N\in\mathbb{N}^*$, pour tous nombres complexes $z_0, z_1, \dots z_N$, on a : $\sum_{k=0}^{N}\mathrm{Re}(z_k)=\mathrm{Re}\big(\sum_{k=0}^{N} z_k\big)$

3) Pour tout réel q différent de 1 : $\sum_{k=0}^{n} q^k=\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$. *Formule à connaître en « français » :*

Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q :

premier terme de la somme $\times\ \dfrac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$

Attention, comme le précise l'énoncé, cette formule n'est pas valable pour $q=1$ (cf dénominateur !) Pour $q=1$, on a simplement : $\sum_{k=0}^{n} 1^k=\sum_{k=0}^{n} 1=n+1$ (somme de $n+1$ termes tous égaux à 1)

4)a) *Partir du membre de droite pour arriver à celui de gauche semble plus simple...*

$$\forall\alpha\in\mathbb{R},\ \frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}=\frac{\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)-\big(\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha)\big)}{2i}=\frac{\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)-\cos(-\alpha)-i\sin(-\alpha)}{2i}$$
$$=\frac{\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)-\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)}{2i}=\frac{2i\sin(\alpha)}{2i}=\sin(\alpha).$$

On en conclut que pour tout réel α, $\sin(\alpha)=\dfrac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}$

4)b) *De même qu'en 4a, partir du membre de droite (et remplacer le sinus grâce à l'égalité montrée en 4a) semble plus simple.*

Pour tout réel α, $-2i\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\times e^{i\frac{\alpha}{2}}=-2i\times\dfrac{e^{i\frac{\alpha}{2}}-e^{-i\frac{\alpha}{2}}}{2i}\times e^{i\frac{\alpha}{2}}$ (en appliquant 4a, valable pour tout réel α, à $\frac{\alpha}{2}$)

$$=-2i\times\frac{e^{i(\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2})}-e^{i(-\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2})}}{2i}=-(e^{i\alpha}-e^{i\times 0})=-(e^{i\alpha}-1)=1-e^{i\alpha}.$$

Donc, pour tout réel α : $1-e^{i\alpha}=-2i\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\times e^{i\frac{\alpha}{2}}$

On aurait aussi pu partir de $1-e^{i\alpha}$ même si c'est moins évident :

$$1-e^{i\alpha}=e^{i\frac{\alpha}{2}}(e^{-i\frac{\alpha}{2}}-e^{i\frac{\alpha}{2}})=-e^{i\frac{\alpha}{2}}\times\frac{e^{i\frac{\alpha}{2}}-e^{-i\frac{\alpha}{2}}}{2i}\times 2i=-e^{i\frac{\alpha}{2}}\times\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\times 2i$$

5) *Autre résultat de cours qu'on vous demande de démontrer...*

Soit $a\in\mathbb{R}$ et soit $z=x+iy\in\mathbb{C}$ (avec $x,y\in\mathbb{R}$). On a alors $az=a(x+iy)=ax+aiy$

Donc $\mathrm{Re}(az) = ax$. Et $a\mathrm{Re}(z) = a \times x = ax$.
On a donc bien : $\boxed{\text{pour tout } a \in \mathbb{R}, \text{ pour tout } z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(az) = a\mathrm{Re}(z)}$

6) *Enfin. L'aboutissement de toutes ces questions étranges.*

$S = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Re}(e^{ik\theta})$ (cf question 1)

Donc $S = \mathrm{Re}\Big(\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}\Big)$ (cf question 2).

Donc $S = \mathrm{Re}\Big(\sum_{k=0}^{n} (e^{i\theta})^k\Big)$ avec $e^{i\theta} \neq 1$ car $\theta \in]0\,;2\pi[$.

D'où : $S = \mathrm{Re}\Big(\frac{1-(e^{i\theta})^{n+1}}{1-e^{i\theta}}\Big)$ (cf question 3, dont l'énoncé nous a permis de généraliser le résultat de $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ à $\mathbb{C}\backslash\{1\}$)

Donc $S = \mathrm{Re}\Big(\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}\Big)$.

Puis (en appliquabt 4b avec $\alpha = (n+1)\theta$ au numérateur et $\alpha = \theta$ au dénominateur) :

$$S = \mathrm{Re}\left(\frac{-2i\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right) \times e^{i\frac{(n+1)\theta}{2}}}{-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \times e^{i\frac{\theta}{2}}}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \times e^{i(\frac{(n+1)\theta}{2}-\frac{\theta}{2})}\right)$$

$$= \mathrm{Re}\left(\frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \times e^{i\frac{n\theta}{2}}\right)$$

Enfin, en remarquant que $\frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ est un réel *(ce qui peut vous avoir échappé dans le feu de l'action)*, et en utilisant la question 5 : $S = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \times \mathrm{Re}\left(e^{i\frac{n\theta}{2}}\right)$.

Finalement : $\boxed{S = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \times \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)}$

Ouf.