Suite convergeant vers 0

Ayoub Hajlaoui

Ne tombez point des nues. Dans vos atouts puisez :
un saut vers l'inconnu peut être maîtrisé.

Énoncé : (temps conseillé : 30 min)

Soit (a_n) une suite de réels positifs convergeant vers 0.
Soit (u_n) une suite de réels positifs bornée vérifiant, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} \leq \dfrac{u_n + a_n}{2}$
Montrer que la suite (u_n) converge vers 0.

Correction :

Un énoncé a priori bien brumeux... Mais essayons de rattacher, plus ou moins vaguement, l'inconnu à ce que nous connaissons. L'inéquation vérifiée par les termes de la suite (u_n) serait plus à portée de notre cours si c'était une équation, et si (a_n) était constante... (u_n) serait alors une suite arithmético-géométrique. Mais voilà, cruelle réalité, c'est une inéquation, et (a_n) n'est pas supposée constante.. Comment concilier désirs et réalité ? Vous avez 4 heures (ou 30 minutes).

Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}u_n + \dfrac{1}{2}a_n$

(a_n) converge vers 0. Donc, par définition de la limite :
pour tout $\epsilon > 0$, il existe un rang $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N_\epsilon,\ |a_n - 0| < \epsilon$. Autrement dit :
pour tout $\epsilon > 0$, il existe un rang $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N_\epsilon,\ 0 \leq a_n < \epsilon$. (car (a_n) positive)

Soit $\epsilon > 0$. En vertu de ce qui précède, il existe un entier N tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} < \dfrac{1}{2}u_n + \dfrac{\epsilon}{2}$
Je l'ai appelé N et pas N_ϵ pour ne pas galérer avec les indices. Mais je n'oublie pas qu'il dépend de ϵ
Mais attendez ! Ne venons-nous pas de « remplacer » a_n par une constante ?

Soit (w_n) la suite définie à partir du rang N par : $w_N = u_n$ et : $\forall n \geq N, w_{n+1} = \dfrac{1}{2}w_n + \dfrac{\epsilon}{2}$

Autrement dit, (w_n) démarre en N comme (u_n), mais ensuite, l'inéquation entre u_{n+1} et u_n devient une équation entre w_{n+1} et w_n...

w est une suite arithmético-géométrique.
Déterminons l tel que $v = w - l$ soit une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$. l vérifie l'équation : $l = \dfrac{1}{2}l + \dfrac{\epsilon}{2}$. Donc $l = \epsilon$.
Montrons que la suite v définie pour tout $n \geq N$ par $v_n = w_n - \epsilon$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$:
pour tout $n \geq N$, $v_{n+1} = w_{n+1} - \epsilon = \dfrac{1}{2}w_n + \dfrac{\epsilon}{2} - \epsilon = \dfrac{1}{2}w_n - \dfrac{\epsilon}{2} = \dfrac{1}{2}(w_n - \epsilon) = \dfrac{1}{2}v_n$.
Donc (v_n) est bien géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$. Donc, pour tout $n \geq N$, $v_n = v_N \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-N}$

Et donc (pour revenir à w) : pour tout $n \geq N$, $w_n = v_n + \epsilon = v_N \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} + \epsilon$

Oui mais ça, c'est w_n. Quel rapport avec u_n ? Intuitivement, on sent bien que $u_n \leq w_n$ (parce que l'inégalité $\leq$ chez (u_n) a été remplacée par une égalité chez (w_n)). Mais bien sûr, il va falloir le démontrer. Par exemple, par récurrence.

Montrons par récurrence que pour tout entier $n \geq N$, $u_n \leq w_n$.

<u>Initialisation :</u> pour $n = N$: $w_N = u_N$. L'inégalité au sens large est bien vérifiée.

<u>Hérédité :</u> Supposons que pour un certain $n \geq N$, $u_n \leq w_n$, et montrons : $u_{n+1} \leq w_{n+1}$
Par hypothèse, $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n + \frac{\epsilon}{2} \leq \frac{1}{2}w_n + \frac{\epsilon}{2}$ par hypothèse de récurrence. Et $\frac{1}{2}w_n + \frac{\epsilon}{2} = w_{n+1}$
Donc $u_{n+1} \leq w_{n+1}$. La propriété est donc héréditaire.

<u>Conclusion :</u> Le principe de raisonnement par récurrence nous permet de conclure ce qui suit : pour tout entier $n \geq N$, $u_n \leq w_n$

Autrement dit, pour tout $n \geq N$, $u_n \leq v_n + \epsilon = v_N \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} + \epsilon$

Et là, je suis un peu bloqué. J'aimerais dire que, à partir d'un certain rang n, $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-N}$ peut être rendu inférieur à ϵ. Mais le v_N en facteur m'inquiète...

Pour tout $n \geq N$, $u_n \leq (w_N - \epsilon) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} + \epsilon$ (par définition de (v_n))
Donc pour tout $n \geq N$, $u_n \leq (u_N - \epsilon) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} + \epsilon$ (puisqu'on a posé $w_N = u_N$)

Or, d'après l'énoncée, (u_n) est bornée. Donc il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < M$.
En particulier, $u_N < M$ (et M ne dépend pas de N)
Donc , pour tout $n \geq N$, $u_n < (M - \epsilon) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} + \epsilon < M\left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} + \epsilon$.
Enfin, la suite $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)$ converge vers 0. Donc, par définition de limite, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq N_2$, $u_k < \epsilon$ *(je l'ai appelé N_2 parce que ce n'est pas forcément le même que N)*

On a alors, pour tout $n \geq N + N_2 = N_3$ (de telle sorte que $n \geq N$ et $n - N \geq N_2$) :
$0 \leq u_n < M\epsilon + \epsilon = (M + 1)\epsilon$.

Et un tel entier N_3 quelque soit le $\epsilon > 0$ pris au départ.

Nous avons donc montré :
pour tout $\epsilon > 0$, il existe un rang $N_3 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N_3$, $0 \leq u_n < (M + 1)\epsilon$. Donc :
pour tout $\epsilon > 0$, il existe un rang $N_3 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N_3$, $|u_n| < (M + 1)\epsilon$.

Autrement dit, la suite (u_n) converge vers 0.

Oui mais n'est-ce pas gênant d'avoir du $(M + 1)\epsilon$ au lieu de ϵ ? Pas du tout, ça revient au même. Si le résultat démontré est valable pour tout $\epsilon > 0$, il l'est aussi pour $\frac{\epsilon}{M+1}$... On a alors l'existence d'un rang N_ϵ tel que : $\forall n \geq N_\epsilon$, $|u_n| < (M + 1)\frac{\epsilon}{M+1} = \epsilon$