Valeurs propres possibles

Ayoub Hajlaoui

Énoncé : (temps conseillé : 15 min) *D'après EDHEC 2017 ECS*

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit A la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les éléments diagonaux valent $-n$, les autres valant tous 1. On note J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont égaux à 1, et I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Donner les deux valeurs propres possibles de A. (On pourra exprimer A et A^2 comme combinaisons linéaires de J et de I)

2) Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Correction :

1) *Pour obtenir A, je sais qu'il y a forcément une fois J dans la combinaison linéaire vu que les coefficients non diagonaux de A, pour lesquels seule J peut contribuer, sont égaux à 1. Ensuite, je complète avec autant de I qu'il faut pour obtenir les $-n$ sur la diagonale...*

$\boxed{A = J - (n+1)I}$

Maintenant, ceux qui voudront déterminer explicitement A^2 avant de l'exprimer comme combinaison linéaire de I et J se font violence inutilement. Car tout simplement :

$A^2 = \big(J - (n+1)I\big)^2$. Or, J et I commutent (donc J et $(n+1)I$ commutent).
Donc $A^2 = J^2 - 2(n+1) \times J \times I + (n+1)^2 I^2 = J^2 - 2(n+1)J + (n+1)^2 I$. *Quid de J^2 ?*
Et $J^2 = nJ$ *(à savoir, se retrouve très facilement par le calcul)*
Donc $A^2 = nJ - 2(n+1)J + (n+1)^2 I$. Finalement, $\boxed{A^2 = -(n+2)J + (n+1)^2 I}$

Pourquoi m'a-t-on fait exprimer A et A^2 en fonction de J et I ? A, A^2 et I pourraient servir à construire un polynôme annulateur de A. Mais pour cela, il faut se débarrasser de J...

$A = J - (n+1)I$
$A^2 = -(n+2)J + (n+1)^2 I$
Donc $A^2 + (n+2)A = -(n+2)J + (n+1)^2 I + (n+2)J - (n+1)(n+2)I = (n+1)[(n+1) - (n+2)]I$
Donc $A^2 + (n+2)A = -(n+1)I$. Ou encore : $A^2 + (n+2)A + (n+1)I = 0$

Le polynôme non nul $P = X^2 + (n+2)X + n + 1$ est donc un polynôme annulateur de A.
Ça y est, le mot est dit...
Son discriminant est $\Delta = (n+2)^2 - 4(n+1) = n^2 + 4n + 4 - 4n - 4 = n^2 > 0$
P admet deux racines réelles distinctes $x_1 = \dfrac{-(n+2) - n}{2} = -(n+1)$ et $x_2 = \dfrac{-(n+2) + n}{2} = -1$
Les valeurs propres <u>possibles</u> de A sont donc $-(n+1)$ et -1.

2) 0 *n'est donc pas une valeur propre de A, donc A est bien inversible. Mais ici, je peux démontrer l'inversibilité en exhibant directement A^{-1}, qui est demandée ici..*
On a montré précédemment $A^2 + (n+2)A = -(n+1)I$. Donc $A\big(A + (n+2)I\big) = -(n+1)I$
D'où : $A\Big(-\dfrac{1}{n+1}A - \dfrac{n+2}{n+1}I\Big) = I$. $\boxed{\text{Donc } A \text{ est inversible et } A^{-1} = -\dfrac{1}{n+1}A - \dfrac{n+2}{n+1}I}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com