Application et ensembles de points du plan complexe

Ayoub Hajlaoui

Le lycéen vaillant cherche par l'équation
tous les points invariants par une application.

Énoncé : *d'après bac S Nouvelle-Calédonie, déc 2001* (temps conseillé : 55 min)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, unité graphique : 4 cm. Soit A le point d'affixe $z_{\mathrm{A}} = -\mathrm{i}$ et B le point d'affixe $z_{\mathrm{B}} = -2\mathrm{i}$.

On appelle f l'application qui, à tout point M d'affixe z, M distinct de A, associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = \dfrac{\mathrm{i}z - 2}{z + \mathrm{i}}$.

1. Démontrer que, si z est un imaginaire pur et si $z \neq -\mathrm{i}$, alors z' est imaginaire pur.
2. Déterminer les points invariants par l'application f. (c'est-à-dire tels que $f(M) = M$)
3. Calculer $|z' - \mathrm{i}| \times |z + \mathrm{i}|$.
   Montrer que, quand le point M décrit le cercle de centre A et de rayon 2, le point M' reste sur un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.
4. (a) Développer $(z + \mathrm{i})^2$, puis factoriser $z^2 + 2\mathrm{i}z - 2$.
   (b) Déterminer l'ensemble des points M tels que M' soit le symétrique de M par rapport à O.
5. Déterminer l'ensemble E des points M tels que le module de z' soit égal à 1.

Correction :

1) Si z est un imaginaire pur différent de $-i$, on peut écrire $z = bi$ avec $b \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

On a alors : $z' = \dfrac{i \times bi - 2}{bi + i} = \dfrac{-b - 2}{i(b + 1)} = \dfrac{-b - 2}{b + 1} \times \dfrac{1}{i}$

Il est bon de garder en tête que $\dfrac{1}{i} = -i$. *Bon, ça se retrouve facilement si on ne l'a pas en tête, en multipliant le numérateur et le dénominateur de* $\dfrac{1}{i}$ *par le conjugué de* i*, qui est* $-i$*, mais c'est plus simple de se rappeler que* $-i \times i = 1$*, donc* $-i = \dfrac{1}{i}$

Donc $z' = \dfrac{-b - 2}{b + 1} \times (-i) = \dfrac{b + 2}{b + 1} \times i$, avec $\dfrac{b + 2}{b + 1}$ réel. Donc z' est un imaginaire pur.

$\boxed{\text{On a bien montré que si } z \text{ est un imaginaire pur différent de } -i, \text{ alors } z' \text{ est un imaginaire pur.}}$

2) Les points invariants par l'application f sont les points M d'affixe z (avec $z \neq -i$) tels que $f(M) = M$, c'est-à-dire tels que $z = \dfrac{iz - 2}{z + i}$. Résolvons sur $\mathbb{C}\backslash\{-i\}$ l'équation $z = \dfrac{iz - 2}{z + i}$:

$$\forall z \in \mathbb{C}\backslash\{-i\},\ z = \frac{iz - 2}{z + i} \iff z(z + i) = iz - 2 \iff z^2 + iz = iz - 2 \iff z^2 = -2$$
$$\iff z^2 + 2 = 0 \iff z^2 - \left(\sqrt{2}i\right)^2 = 0 \iff (z - \sqrt{2}i)(z + \sqrt{2}i) = 0 \iff z = \sqrt{2}i \text{ ou } z = -\sqrt{2}i$$

$\boxed{\text{Les points invariants par } f \text{ sont donc les points } M_1 \text{ et } M_2 \text{ d'affixes respectives } z_1 = \sqrt{2}i \text{ et } z_2 = -\sqrt{2}i}$

3) $|z'-i| \times |z+i| = \left|\frac{iz-2}{z+i} - i\right| \times |z+i| = \left|\frac{iz-2-iz+1}{z+i}\right| \times |z+i| = \left|\frac{-1}{z+i}\right| \times |z+i|$
$= \frac{|-1|}{|z+i|} \times |z+i| = |-1|$. Donc $\boxed{|z'-i| \times |z+i| = 1}$

Quand M décrit le cercle de centre A et de rayon 2, $AM = 2$. Autrement dit, $|z - z_A| = 2$. Donc on a $|z+i| = 2$

D'après ce qui précède, $|z'-i| \times 2 = 1$. D'où $|z'-i| = \frac{1}{2}$.

Soit C le point d'affixe i. On a alors : $CM' = \frac{1}{2}$.

$\boxed{\text{En conclusion, quand } M \text{ décrit le cercle de centre } A \text{ et de rayon } 2, M' \text{ reste sur le cercle de centre } C \text{ et de rayon } \frac{1}{2}.}$

4)a) $(z+i)^2 = z^2 + 2iz - 1$. Donc $z^2 + 2iz - 2 = z^2 + 2iz - 1 - 1 = (z+i)^2 - 1$
Donc $\boxed{z^2 + 2iz - 2 = (z+i-1)(z+i+1)}$

4)b) On cherche l'ensemble des points M tels que M' soit le symétrique de M par rapport à O, c'est-à-dire tels que O soit le milieu de $[MM']$. Autrement dit, on veut que $z' = -z$.
Résolvons donc sur $\mathbb{C}\backslash\{-i\}$ l'équation $\frac{iz-2}{z+i} = -z$:
$\forall z \in \mathbb{C}\backslash\{-i\}$, $\frac{iz-2}{z+i} = -z \iff iz - 2 = -z(z+i) \iff iz - 2 = -z^2 - iz \iff z^2 + 2iz - 2 = 0$
$\iff (z+i-1)(z+i+1) = 0 \iff z = 1 - i$ ou $z = -1 - i$
On a utilisé la 4)a) pour factoriser $z^2 + 2iz - 2$

$\boxed{\text{Les points } M \text{ tels que } M' \text{ soit le symétrique de } M \text{ par rapport à } O \text{ sont donc les points } M_3 \text{ et } M_4 \text{ d'affixes respectives } z_3 = 1 - i \text{ et } z_4 = -1 - i}$

5) On cherche tous les M tels que $|z'| = 1$, c'est-à-dire $\left|\frac{iz-2}{z+i}\right| = 1$
$\forall z \in \mathbb{C}\backslash\{-i\}$, $|z'| = 1 \iff \frac{|iz-2|}{|z+i|} = 1 \iff |iz-2| = |z+i| \iff \left|i\left(z - \frac{2}{i}\right)\right| = |z+i|$
$\iff \left|i\left(z+2i\right)\right| = |z+i| \iff \left|i\right| \times \left|z+2i\right| = |z+i| \iff 1 \times \left|z+2i\right| = |z+i|$
$\iff \left|z-(-2i)\right| = |z-(-i)| \iff \left|z - z_B\right| = |z - z_A| \iff AM = BM$
$\iff M$ est sur la médiatrice de $[AB]$. Cette médiatrice ne contient pas le point A d'affixe $-i$.
Je n'ai donc pas à exclure A de l'ensemble obtenu...

$\boxed{\text{L'ensemble } E \text{ est donc la médiatrice de } [AB].}$