Continuité et norme d'une application linéaire

Ayoub Hajlaoui

Le cours oui je veux bien, mais faites attention :
est-ce qu'il se maintient pour toutes dimensions ?

Énoncé : (temps conseillé : 25 min)

Soit E l'espace vectoriel des applications continues sur $[0\ ;\ 1]$ à valeurs réelles. On munit E de la norme $||.||$ telle que pour tout $f \in E,\ ||f|| = \int_0^1 |f(t)|\ \mathrm{d}t$

Soit l'application Φ qui à tout élément f de E associe l'application $\Phi(f)$ définie sur $[0\ ;\ 1]$ par $\big(\Phi(f)\big)(x) = \int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t$

1) Montrer que Φ est un endomorphisme continu de E.

2) Déterminer $\sup\limits_{f \in E \setminus \{0_E\}} \dfrac{||\Phi(f)||}{||f||}$ (*norme subordonnée de* Φ)

Correction :

1) Pour tout $f \in E$, f est continue sur $[0\ ;\ 1]$, donc $\Phi(f) : x \longmapsto \int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t$ est une fonction continue (et même de classe C^1) sur $[0\ ;\ 1]$. Donc $\Phi(f) \in E$

Montrons maintenant que Φ est linéaire.

Pour tout réel λ, pour tous $f_1, f_2 \in E$, $\Phi(\lambda f_1 + f_2)$ est définie sur $[0\ ;\ 1]$ par :
$\big(\Phi(\lambda f_1 + f_2)\big)(x) = \int_0^x (\lambda f_1 + f_2)(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^x \lambda f_1(t) + f_2(t)\ \mathrm{d}t = \lambda \int_0^x f_1(t)\ \mathrm{d}t + \int_0^x f_2(t)\ \mathrm{d}t$ par linéarité.
Donc, pour tout $x \in [0\ ;\ 1]$, $\big(\Phi(\lambda f_1 + f_2)\big)(x) = \lambda\big(\Phi(f_1)\big)(x) + \big(\Phi(f_2)\big)(x)$
Autrement dit, $\Phi(\lambda f_1 + f_2) = \lambda\Phi(f_1) + \Phi(f_2)$. Φ est donc une application linéaire.

$\boxed{\Phi \text{ est donc un endomorphisme de } E.}$

Ah, génial, Φ est une application linéaire... donc continue non ? Il n'y a pas un résultat qui dit ça ? Oui si E était de dimension finie ! La dimension infinie de E ici joue donc les trouble-fête...

Φ étant linéaire, montrons l'existence de $C > 0$ tel que : $\forall f \in E,\ ||\Phi(f)|| \leq C||f||$

Pour tout $f \in E$, $||\Phi(f)|| = \int_0^1 \left|\big(\Phi(f)\big)(x)\right|\ \mathrm{d}x = \int_0^1 \left|\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t\right|\ \mathrm{d}x$

Or, pour tout $x \in [0\ ;\ 1]$, $\left|\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t\right| \leq \int_0^x |f(t)|\ \mathrm{d}t$ *(inégalité triangulaire)* $\leq \int_0^1 |f(t)|\ \mathrm{d}t$
(la fonction $|f|$ étant positive sur $[0\ ;\ 1]$ et $[0\ ;\ x] \subset [0\ ;\ 1]$)

Donc, par croissance de l'intégrale : $\int_0^1 \left|\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t\right|\ \mathrm{d}x \leq \int_0^1 \left(\int_0^1 |f(t)|\ \mathrm{d}t\right)\ \mathrm{d}x$

D'où : $||\Phi(f)|| \leq \int_0^1 \left(\int_0^1 |f(t)|\ \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x$ *On intègre la constante* $\int_0^1 |f(t)|\ dt$ *sur* $[0\ ;\ 1]$ *...*

Donc $||\Phi(f)|| \leq \int_0^1 |f(t)|\ \mathrm{d}t = ||f||$

On a montré, pour tout $f \in E$: $||\Phi(f)|| \leq ||f||$.

$\boxed{\Phi \text{ est bien un endomorphisme continu de } E.}$

2) D'après l'inégalité finale obtenue en 1), la partie $\left\{ \frac{||\Phi(f)||}{||f||},\ f \in E \backslash \{0_E\} \right\}$ de $\mathbb{R}$ est majorée par 1. Elle admet donc une borne supérieure réelle.
Et $\sup\limits_{f \in E \backslash \{0_E\}} \frac{||\Phi(f)||}{||f||} \leq 1$

Peut-être si l'on arrivait à trouver une fonction $f \in E$ *non nulle telle que* $||\Phi(f)|| = ||f||$*... Mais en jetant un œil aux inégalités successives de* 1*), on se rend compte qu'une telle égalité impliquerait que pour tout* $x \in [0\ ;\ 1]$ *:* $\left| \int_0^x f(t)\ dt \right| = \int_0^x |f(t)|\ dt$ *(ce qui impose un signe constant pour* f *) mais aussi* $\int_0^x |f(t)|\ dt = \int_0^1 |f(t)|\ dt$*, ce qui n'est possible que si* $|f|$ *(et donc* f *) est nulle sur* $[x\ ;\ 1]$*, et ce pour tout* $x \in [0\ ;\ 1]$*. Autrement dit,* f *est nulle sur* $[0\ ;\ 1]$*. Échec...*

Revoyons nos ambitions à la baisse. Si l'on trouvait une suite (f_n) *de fonctions non nulles de* E *telles que* $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{||\Phi(f_n)||}{||f_n||} = 1$ *? Intuitivement, il s'agirait d'une suite de fonctions dont les valeurs s'écraseraient de plus en plus pour* x *s'éloignant de* 0 *(vu l'égalité d'intégrales mise en exergue précédemment, mais impossible à obtenir pour* $f \in E^*$*). Peut-être des exponentielles décroissantes...*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit f_n définie sur $[0\ ;\ 1]$ par $f_n(x) = e^{-nx}$.
$f_n \in E$, et $||f_n|| = \int_0^1 |e^{-nx}|\ \mathrm{d}t = \int_0^1 e^{-nx}\ \mathrm{d}t = \left[-\frac{e^{-nx}}{n} \right]_0^1 = \frac{1 - e^{-n}}{n}$
$\forall x \in [0\ ;\ 1]$, $\big(\Phi(f_n)\big)(x) = \int_0^x e^{-nt}\ \mathrm{d}t = \frac{1 - e^{-nx}}{n}$ donc $||\Phi(f_n)|| = \int_0^1 \left| \frac{1 - e^{-nx}}{n} \right| \mathrm{d}t$
$= \int_0^1 \frac{1 - e^{-nx}}{n}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1 - e^{-n}}{n} \right)$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\frac{||\Phi(f_n)||}{||f_n||} = \frac{1 - \frac{1 - e^{-n}}{n}}{1 - e^{-n}}$. Et donc (par opérations sur les limites) : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{||\Phi(f_n)||}{||f_n||} = 1$. Donc, par définition de la borne supérieure : $\sup\limits_{f \in E \backslash \{0_E\}} \frac{||\Phi(f)||}{||f||} \geq 1$
Rappelons qu'on a aussi : $\sup\limits_{f \in E \backslash \{0_E\}} \frac{||\Phi(f)||}{||f||} \leq 1$

Nous avons donc établi : $\boxed{\sup\limits_{f \in E \backslash \{0_E\}} \frac{||\Phi(f)||}{||f||} = 1}$

Pour f_n*, on aurait aussi pu prendre, par exemple,* $f_n(0) = 1$*,* f_n *nulle sur* $\left[\frac{1}{n}\ ;\ 1\right]$ *et* f_n *affine sur* $\left[0\ ;\ \frac{1}{n}\right]$*, toujours dans cette idée d'écraser de plus en plus les valeurs de* $f_n(x)$ *pour* x *« assez loin »de* 0*.*