Convergence de produit et de sommes

Ayoub Hajlaoui

Quand Hélène nous fait passer de Sparte à Troie,
son homophone sait aussi jouer les courroies.

Énoncé : (temps conseillé : 25 min) *d'après e4a 2003*

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $]1\ ;\ +\infty[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $p_n = \prod_{k=0}^{n} a_k$

1) Montrer que si la série $\sum_{n\geq 0} \ln(a_n)$ converge, alors la suite (p_n) converge, et exprimer sa limite p en fonction de $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(a_n)$

2) Dans le cas où $\sum_{n\geq 0} \ln(a_n)$ diverge, étudier la convergence de (p_n).

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = a_n - 1$. Démontrer que (p_n) converge vers $p > 0$ si et seulement si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge

Correction :

1) *On aimerait transformer cette somme de logarithmes en logarithme d'un produit... Mais quand je dis « cette somme », je ne suis pas clair ! Je dois le faire pour les sommes partielles, hors de question d'écrire des horreurs du style :* $\sum_{n\geq 0} \ln(a_n) = \ln\left(\prod_{n\geq 0} a_n\right)$

Si la série $\sum_{n\geq 0} \ln(a_n)$ converge : $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \ln(a_k) = S$ (où S est défini par l'énoncé)

Or, pour tout entier naturel n : $\sum_{k=0}^{n} \ln(a_k) = \ln\left(\prod_{k=0}^{n} a_k\right)$

Donc, pour tout entier naturel n : $\exp\left(\sum_{k=0}^{n} \ln(a_k)\right) = \prod_{k=0}^{n} a_k = p_n$

Or : $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \ln(a_k) = S$. Donc, par continuité de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$ (et en particulier en S) : $\lim_{n\to+\infty} \exp\left(\sum_{k=0}^{n} \ln(a_k)\right) = e^S$.

En conclusion, $\boxed{\text{si } \sum_{n\geq 0} \ln(a_n) \text{ converge, la suite } (p_n) \text{ converge vers } p = e^S.}$

2) Si la série $\sum_{n\geq 0} \ln(a_n)$ diverge, on a toujours : $\forall n \in \mathbb{N},\ \exp\left(\sum_{k=0}^{n} \ln(a_k)\right) = \prod_{k=0}^{n} a_k = p_n$

Cette fois-ci : $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \ln(a_k) = +\infty$. En effet, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k > 1$ donc $\ln(a_k) > 0$, ce qui implique que $\sum_{n\geq 0} \ln(a_n)$ est une série à termes positifs divergente (et donc que la suite de ses sommes partielles diverge vers $+\infty$).

Par composée de limites : $\lim_{n\to+\infty} \exp\left(\sum_{k=0}^{n} \ln(a_k)\right) = +\infty$. Autrement dit : $\lim_{n\to+\infty} p_n = +\infty$

En conclusion, $\boxed{\text{si } \sum_{n\geq 0} \ln(a_n) \text{ diverge, la suite } (p_n) \text{ diverge vers } +\infty.}$

3) *Démontrons prudemment cette équivalence par double implication.*

- $\boxed{\text{Si } (p_n) \text{ converge vers } p > 0}$, alors $\sum_{n\geq 0} \ln(a_n)$ converge.

En effet, d'après 2), si $\sum_{n\geq 0} \ln(a_n)$ divergeait, (p_n) divergerait, ce qui n'est pas le cas ici.

Or, pour tout entier naturel n, $a_n = 1 + u_n$. Donc $\sum_{n\geq 0} \ln(1 + u_n)$ converge.

On est quasiment arrivés à $\sum_{n\geq 0} \ln(1+u_n)$*... Peut-être qu'un théorème de comparaison en donnant un équivalent du terme général... Mais à justifier proprement !*

Donc, a fortiori, $\lim_{n\to+\infty} \ln(1 + u_n) = 0$. Et, par continuité de la fonction exponentielle en 0 : $\lim_{n\to+\infty} 1 + u_n = e^0 = 1$. D'où : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. Et donc : $\ln(1 + u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.
Pour tout entier naturel n, $u_n > 0$ (et $\ln(1 + u_n) > 0$) car $a_n > 1$.
Par théorème de comparaison des séries à termes positifs : $\sum_{n\geq 0} \ln(1 + u_n)$ et $\sum_{n\geq 0} u_n$ sont de même nature. Donc $\boxed{\sum_{n\geq 0} u_n \text{ converge.}}$

- $\boxed{\text{Si } \sum_{n\geq 0} u_n \text{ converge}}$, alors, en particulier, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(1 + u_n) = \ln(a_n)$

Par théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum_{n\geq 0} \ln(a_n)$ converge aussi.

Donc d'après 1), (p_n) converge vers $\boxed{p = \exp\left[\sum_{n=0}^{+\infty} \ln(a_n)\right] > 0}$

En conclusion : $\boxed{(p_n) \text{ converge vers } p > 0 \text{ si et seulement si la série } \sum_{n\geq 0} u_n \text{ converge.}}$