Convergence simple et uniforme vers la fonction gamma

Ayoub Hajlaoui

Les pages de la vie de ceci nous informent :
même un simple d'esprit peut porter l'uniforme.

Énoncé : (temps conseillé : 35 min)

1) Démontrer que pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$.
Pour tout $x > 0$, on note $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n sur $]0\,;+\infty[$ par $f_n(x) = \displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t$

a) Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction Γ sur $]0\,;+\infty[$.
b) Cette convergence est-elle uniforme ?

Correction :

1) Soit $x > 0$.

• La fonction $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est continue et positive sur $]0\,;+\infty[$.
La positivité est utile pour pouvoir utiliser les critères d'intégrabilité par comparaison...

• De plus : $\lim\limits_{t\to 0} e^{-t} = 1$ donc $e^{-t}t^{x-1} \underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1} = \dfrac{1}{t^{1-x}}$ avec $1 - x < 1$ (car $x > 0$).
Et $t \mapsto \dfrac{1}{t^{1-x}}$ est intégrable sur un voisinage de 0 (cf intégrale de Riemann).
Donc $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est intégrable sur un voisinage de 0.

•, Enfin, pour tout $t > 0$, $\dfrac{e^{-t}t^{x-1}}{\frac{1}{t^2}} = e^{-t}t^{x+1}$ et, par croissance comparée, $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-t}t^{x+1} = 0$.
Donc $e^{-t}t^{x-1} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.
Et $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur un voisinage de 0 (cf intégrale de Riemann avec $2 > 1$).
Donc $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est intégrable sur un voisinage de $+\infty$.

$\boxed{\text{En conclusion : pour tout } x > 0\text{, la fonction } t \mapsto e^{-t}t^{x-1} \text{ est intégrable sur }]0\,;+\infty[.}$

2)a) *Ça sent l'interversion limite intégrale, par exemple la convergence dominée. Mais la borne qui bouge avec n, on n'aime pas trop. Pour contourner ce problème, l'astuce est classique...*
Soit $x > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction g_n sur $]0\,;+\infty[$ par :
• $g_n(t) = \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n t^{x-1}$ si $t \in]0\,;n]$ • $g_n(t) = 0$ si $t \in]n\,;+\infty[$
Autrement dit : $\forall t > 0$, $g_n(t) = \mathbb{1}_{]\,0\,;\,n\,]}(t) \times \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n t^{x-1}$ où $\mathbb{1}_{]\,0\,;\,n\,]}$ est l'indicatrice de $]0\,;n]$
$\Big(g_n$ est intégrable sur $]0\,;n]$ car continue par morceaux et positive sur $]0\,;n]$, et $g_n(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^{x-1}}\Big)$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com

On a alors, pour tout entier naturel non nul n : $f_n(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t$ *Voilà qui fixe les bornes !*
Soit $t > 0$.
$\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \exp\left(n\left(-\frac{t}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$
Donc $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{=} \exp\left(-t + o(1)\right)$. Donc, par continuité de la fonction exponentielle en t, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{-t}$ *(calcul de limite classique mais à faire proprement, en évitant l'horrible écueil de la composée d'équivalents)*

D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{1}_{]0\,;\,n]}(t) = 1$. En effet ($t$ étant fixé), pour tout $n \geq t$, $\mathbb{1}_{]0\,;\,n]}(t) = 1$
Donc, par produit de limites : $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(t) = e^{-t}t^{x-1}$

La suite de fonctions (g_n) converge donc simplement sur $]0\,;+\infty[$ vers la fonction $g : t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ continue par morceaux (car continue) sur $]0\,;+\infty[$)
Pour tout entier naturel n non nul, g_n est continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$.

Pour pouvoir utiliser le théorème de convergence dominée, il ne reste plus « que » l'hypothèse de domination...Il nous faudrait exhiber une fonction φ intégrable sur $]0\,;+\infty[$ telle que, pour tout entier naturel non nul, $|g_n| \leq \varphi$
Un bon réflexe à avoir, lorsqu'on ne trouve pas φ du premier coup d'œil, est de voir si, par hasard, les (g_n) ne seraient pas dominées par leur limite simple, à savoir g (lorsqu'on sait celle-ci intégrable sur l'intervalle considéré)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|g_n| = g_n$ par positivité de g_n.

- Pour tout $t \in]n\,;+\infty[$, $|g_n(t)| \leq g(t)$ car $g_n(t) = 0$ sur $]n\,;+\infty[$

- Et, pour tout $t \in]0\,;n]$: $g_n(t) = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right)\right)t^{x-1}$

Ce serait bien si on pouvait montrer : $n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) \leq -t$*... C'est-à-dire* $\ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) \leq -\frac{t}{n}$..
Montrons que pour tout $x \in]0\,;1[$, $\ln(1 - x) \leq -x$
Soit la fonction h définie sur $[0\,;1[$ par $h(x) = -x - \ln(1 - x)$
h est dérivable sur $[0\,;1[$ par composée et somme de fonctions dérivables.
Pour tout $x \in [0\,;1[$; $h'(x) = -1 + \frac{1}{1 - x} = \frac{-1 + x + 1}{1 - x} = \frac{x}{1 - x} > 0$

h est donc strictement croissante sur $[0\,;1[$. Et $h(0) = 0$. Donc, pour tout $x \in [0\,;1[$, $h(x) \geq 0$.
D'où : pour tout $x \in]0\,;1[$, $\ln(1 - x) \leq -x$
Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $t \in]0\,;n]$, $\ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) \leq -\frac{t}{n}$ (car $\frac{t}{n} \in]0\,;1]$).
D'où : $n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) \leq -t$ et, par croissance de la fonction exponentielle : $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}$.
En multipliant l'inégalité précédente par $t^{x-1} > 0$, on obtient : $t^{x-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq t^{x-1}e^{-t}$
Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $t \in]0\,;n]$, $|g_n(t)| \leq t^{x-1}e^{-t} = g(t)$

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in]0\,;+\infty[$, $|g_n(t)| \leq g(t)$, avec g intégrable sur $]0\,;+\infty[$

D'après le théorème de convergence dominée : $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$
On a donc montré, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$: $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \Gamma(x)$

$\boxed{\text{La suite de fonctions } (f_n) \text{ converge donc simplement vers la fonction } \Gamma \text{ sur }]0\,;+\infty[}$

2)b) *On se demande si* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in\ ]0;+\infty[} \left|f_n(x)-\Gamma(x)\right| = 0\ldots$

Pour tout entier naturel n non nul, pour tout $x>0$:

$\left|f_n(x)-\Gamma(x)\right| = \left|\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t\right| = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t - \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t$

(En effet, en reprenant les notations de 2)a), $\int_0^{+\infty} g(t)\,dt \geq \int_0^{+\infty} g_n(t)\,dt$ *par croissance de l'intégrale)*

Donc $\left|f_n(x)-\Gamma(x)\right| = \int_0^n e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t + \int_n^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t - \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t$

Peut-être quelque chose à jouer avec l'intégrale de n à $+\infty$, libre de tout pendant négatif...

$\left|f_n(x)-\Gamma(x)\right| = \int_0^n \left(e^{-t}-(1-\frac{t}{n})^n\right)t^{x-1}\,\mathrm{d}t + \int_n^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$

Et comme pour tout $t\in\ ]0\,;n]$, $(1-\frac{t}{n})^n \leq e^{-t}$, par positivité : $\int_0^n \left(e^{-t}-(1-\frac{t}{n})^n\right)t^{x-1}\,\mathrm{d}t \geq 0$

Donc $\left|f_n(x)-\Gamma(x)\right| \geq \int_n^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$.

En prenant $x>1$: $\left|f_n(x)-\Gamma(x)\right| \geq n^{x-1}\int_n^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ $\left(\int_n^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t\right.$ étant bien convergente$\left.\right)$

D'où : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x>1$: $\left|f_n(x)-\Gamma(x)\right| \geq n^{x-1}\ e^{-n}$ *(on a juste calculé l'intégrale)*

En particulier, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $\left|f_n(n+1)-\Gamma(n+1)\right| \geq n^n e^{-n} = \left(\frac{n}{e}\right)^n$

Et $\sup\limits_{x\in\ ]0;+\infty[} \left|f_n(x)-\Gamma(x)\right| \geq \left|f_n(n+1)-\Gamma(n+1)\right|$

Donc, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\sup\limits_{x\in\ ]0;+\infty[} \left|f_n(x)-\Gamma(x)\right| \geq \left(\frac{n}{e}\right)^n$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{e}\right)^n = +\infty$.

Donc, par théorème de comparaison : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in\ ]0;+\infty[} \left|f_n(x)-\Gamma(x)\right| = +\infty$

En particulier, on n'a pas : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in\ ]0;+\infty[} \left|f_n(x)-\Gamma(x)\right| = 0$.

En conclusion, (f_n) ne converge pas uniformément vers Γ sur $]0\,;+\infty[$