Diviseurs premiers et logarithme

Ayoub Hajlaoui

Amitié fusionnelle : ln et les premiers !
Leurs effluves se mêlent, afin que vous ramiez.

Énoncé : (temps conseillé : 30 min)

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on note $P(n) = \prod_{\substack{p \text{ premier} \\ p|n \text{ et } p>\ln n}} (1 - \frac{1}{p})$.

Autrement dit, $P(n)$ est le produit des $(1 - \frac{1}{p})$ pour tous les nombres premiers p divisant n et strictement supérieurs à $\ln n$.
Par convention, si n n'admet aucun diviseur premier strictement supérieur à $\ln n$, on pose $P(n) = 1$.
Démontrer que $\lim_{n \to +\infty} P(n) = 1$

Correction :

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Si n n'admet aucun diviseur premier strictement supérieur à $\ln n$, $P(n) = 1$. Sinon :
remarquons : $\forall n \geq 2,\ P(n) < 1$ (par produit de réels appartenant à $]0\,;1[$)

Du coup, si on arrivait à minorer $P(n)$ par une quantité $A(n)$ tendant vers 1…

Soit $\prod_{i=1}^{N} p_i^{\alpha_i}$ la décomposition en facteurs premiers de n. *Il semble en effet naturel de penser à une telle décomposition dans ce contexte… Quelles inégalités utiles pouvons-nous en dégager ?*

Soit k le nombre de facteurs premiers de n strictement supérieurs à $\ln n$. On a alors : $n > (\ln n)^k$

En effet, ces k nombres premiers figurent dans la décomposition en facteurs premiers de n, avec chacun une puissance au moins égale 1. Et ils sont tous strictement supérieurs à $\ln n$…

Et pour tout entier p divisant n et strictement supérieur à $\ln n$:
$\frac{1}{p} < \frac{1}{\ln n}$ (par stricte décroissance de la fonction inverse sur $]0\,;+\infty[$). D'où : $1 - \frac{1}{p} > 1 - \frac{1}{\ln n}$
$P(n)$ est donc constitué de k facteurs tous strictement supérieurs à $1 - \frac{1}{\ln n}$

Fort bien, mais sont-ils tous positifs ? (pour pouvoir passer au produit dans l'inégalité)

Pour $n \geq 3$, $\ln n > \ln e = 1$ (par stricte croissance de ln sur $]0\,;+\infty[$). Donc $1 - \frac{1}{\ln n} > 0$.

Et ça ne nous dérange pas de nous restreindre au cas $n \geq 3$ puisque, de toute façon, nous voulons une limite en $+\infty$…
Donc si $n \geq 3$, $P(n) = \prod_{\substack{p \text{ premier} \\ p|n \text{ et } p>\ln n}} (1 - \frac{1}{p}) \ > \ (1 - \frac{1}{\ln n})^k$ (k facteurs tous $> 1 - \frac{1}{\ln n}$ ..)

Autrement dit : $P(n) > \exp\left(k\ln(1-\dfrac{1}{\ln n})\right)$
Oui mais nous ne savons pas grand-chose sur k, qui dépend de n. Ne peut-on pas le minorer ?

Rappelons : $n > (\ln n)^k$. *Pour faire descendre, k, il va falloir encore appliquer* $\ln$. *Oui, oui...*

Donc (par stricte croissance de ln sur $]0\,;+\infty[$) : $\ln n > \ln\left((\ln n)^k\right)$. D'où : $\ln n > k\ln\left(\ln n\right)$
Attention si on veut diviser par $\ln\left(\ln n\right)$...

Par composition de limites : $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\ln n\right) = +\infty$. Il existe donc un rang n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $\ln\left(\ln n\right) > 0$.
On a alors, pour tout $n \geq \max(3, n_0)$: $k < \dfrac{\ln n}{\ln(\ln n)}$
On veut $n \geq 3$ pour des raisons citées ci-haut. Revenons maintenant à $P(n)$...

Pour tout entier $n \geq \max(3, n_0)$, $P(n) > \exp\left(\dfrac{\ln n}{\ln(\ln n)}\ln(1-\dfrac{1}{\ln n})\right) = A(n)$

Bon. Plus qu'à espérer que cette quantité $A(n)$ tende vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$...

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\ln n} = 0$. Donc $\ln(1-\dfrac{1}{\ln n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{\ln n}$. D'où : $(\ln n)\ln(1-\dfrac{1}{\ln n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} -1$
Enfin, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln n}{\ln(\ln n)}\ln(1-\dfrac{1}{\ln n}) = 0$.
Et, par continuité de la fonction exp en 0 : $\lim\limits_{n\to+\infty} A(n) = e^0 = 1$.

Finalement : pour tout $n \geq \max(3, n_0)$, $A(n) < P(n) \leq 1$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} A(n) = 1$.
L'inégalité est bien valable pour les n n'admettant aucun diviseur premier strictement supérieur à leur logarithme, pour lesquels $P(n) = 1$.

Le théorème des gendarmes nous permet donc de conclure : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} P(n) = 1}$