Équations et coordonnées dans l'espace

Ayoub Hajlaoui

Sauf quelques nouveautés, rien de bien émouvant
et les coordonnées se trouvent comme avant.

Énoncé : *bac S Nouvelle-Calédonie, nov 2014* (temps conseillé : 55 min)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On donne les points A$(1\ ;\ 0\ ;\ -1)$, B$(1\ ;\ 2\ ;\ 3)$, C$(-5\ ;\ 5\ ;\ 0)$ et D$(11\ ;\ 1\ ;\ -2)$.
Les points I et J sont les milieux respectifs des segments [AB] et [CD].
Le point K est défini par $\overrightarrow{\text{BK}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\text{BC}}$.

1. (a) Déterminer les coordonnées des points I, J et K.
   (b) Démontrer que les points I, J et K définissent un plan.
   (c) Montrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(3\,;\,1\,;\,4)$ est un vecteur normal au plan (IJK).
   En déduire une équation cartésienne de ce plan.
2. Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $3x + y + 4z - 8 = 0$.
   (a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (BD).
   (b) Démontrer que le plan $\mathcal{P}$ et la droite (BD) sont sécants et donner les coordonnées de L, point d'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite (BD).
   (c) Le point L est-il le symétrique du point D par rapport au point B ?

Correction :

1)a) I est le milieu de $[AB]$ donc $I(\frac{x_A+x_B}{2}\,;\frac{y_A+y_B}{2}\,;\frac{z_A+z_B}{2})$. D'où : $I(\frac{1+1}{2};\frac{0+2}{2};\frac{-1+3}{2})$
Donc $\boxed{I(1;\ 1;\ 1)}$.
J est le milieu de $[CD]$ donc $J(\frac{-5+11}{2};\frac{5+1}{2};\frac{0-2}{2})$. D'où $\boxed{J(3;\ 3;\ -1)}$
$\overrightarrow{BC}(x_C - x_B; y_C - y_B; z_C - z_B)$ donc $\overrightarrow{BC}(-5-1; 5-2; 0-3)$ d'où $\overrightarrow{BC}(-6;\ 3;\ -3)$

Même s'il arrive souvent de mettre les coordonnées des vecteurs en colonne, je mets ici les coordonnées de mes vecteurs en ligne comme l'énoncé (un petit coup d'oeil à la 1c pour le constater).

Donc $\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}(-2; 1; -1)$. Et $\overrightarrow{BK}(x_K - 1; y_K - 2; z_K - 3)$. K est défini par $\overrightarrow{\text{BK}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\text{BC}}$. Donc :
$\begin{cases} x_K - 1 &= -2 \\ y_K - 2 &= 1 \\ z_K - 3 &= -1 \end{cases}$ Donc $\begin{cases} x_K &= -1 \\ y_K &= 3 \\ z_K &= 2 \end{cases}$. Finalement, $\boxed{K(-1;\ 3;\ 2)}$

1)b) *Rappelons que les points I, J et K définissent un plan si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont non colinéaires.*
$\overrightarrow{IJ}(2;\ 2;\ -2)$ et $\overrightarrow{IK}(-2;\ 2;\ 1)$.

Les coordonnées de ces deux vecteurs sont non proportionnelles (on a notamment : $\frac{2}{-2} \neq \frac{2}{2}$).
$\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ ne sont donc pas colinéaires : $\boxed{\text{les points } I,\ J \text{ et } K \text{ définissent bien un plan } (IJK).}$

1)c) *En lisant cette question, certains aimeraient peut-être déterminer une équation cartésienne de (IJK) pour ensuite obtenir un vecteur normal à (IJK) à partir des « a, b et c » obtenus dans l'équation. Il leur suffirait alors de voir si $\overrightarrow{n}$ est colinéaire au vecteur obtenu pour conclure. Oui mais... lisez la suite de la question (voilà pourquoi il est préconisé de lire l'énoncé en entier).*

Pour montrer que $\overrightarrow{n}$ est normal au plan (IJK), il suffit de montrer que $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan.
$\overrightarrow{IJ}\,(2;\ 2;\ -2)$ et $\overrightarrow{IK}\,(-2;\ 2;\ 1)$ sont deux vecteurs non colinéaires (voir 1b) de (IJK).

$\overrightarrow{n}\,.\,\overrightarrow{IJ} = 3 \times 2 + 1 \times 2 + 4 \times (-2) = 0$ donc $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{IJ}$
$\overrightarrow{n}\,.\,\overrightarrow{IK} = 3 \times (-2) + 1 \times 2 + 4 \times 1 = 0$ donc $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{IK}$

$\boxed{\text{Le vecteur } \overrightarrow{n} \text{ de coordonnées } (3\ ;\ 1\ ;\ 4) \text{ est donc un vecteur normal au plan } (IJK).}$

(IJK) a donc pour équation cartésienne : $3x + y + 4z + d = 0$, où d est un réel à déterminer. *Pour cela, il suffit d'utiliser les coordonnées d'un point du plan* (IJK)
Par exemple, le point I, de coordonnées $(1\ ;\ 1\ ;\ 1)$, appartient à (IJK). Les coordonnées de I vérifient donc l'équation cartésienne de ce plan. Autrement dit : $3 \times 1 + 1 + 4 \times 1 + d = 0$
Finalement, $d = -8$. En conclusion, $\boxed{\text{une équation cartésienne de } (IJK) \text{ est : } 3x + y + 4z - 8 = 0}$

2)a) *Hein ? $\mathcal{P}$ a la même équation cartésienne que (IJK) ? Faut-il être déstabilisé ? Pas de quoi, on a tout simplement $\mathcal{P} = (IJK)$. Bon, bien évidemment, en cas de doute, on peut toujours vérifier nos calculs.*
B$(1\ ;\ 2\ ;\ 3)$ est un point de la droite (BD) et $\overrightarrow{BD}\,(10\ ;\ -1\ ;\ -5)$ est un vecteur directeur de cette droite. Une représentation paramétrique de la droite (BD) est donc

$$\boxed{(BD) : \begin{cases} x & = 1 + 10t \\ y & = 2 - t \\ z & = 3 - 5t \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}}$$

2)b) Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace. $M \in \mathcal{P} \cap (BD)$ (*intersection de $\mathcal{P}$ et (BD)*) si et seulement si il existe un réel t tel que : $\begin{cases} x & = 1 + 10t \\ y & = 2 - t \\ z & = 3 - 5t \\ 3x + y + 4z - 8 & = 0 \end{cases}$, c'est-à-dire tel que :

$\begin{cases} x & = 1 + 10t \\ y & = 2 - t \\ z & = 3 - 5t \\ 3(1 + 10t) + 2 - t + 4(3 - 5t) - 8 & = 0 \end{cases}$, ou encore $\begin{cases} x & = 1 + 10t \\ y & = 2 - t \\ z & = 3 - 5t \\ 9t + 9 & = 0 \end{cases}$

Ce système équivaut à : $\begin{cases} x & = -9 \\ y & = 3 \\ z & = 8 \\ t & = -1 \end{cases}$.

On en déduit que $\boxed{\mathcal{P} \text{ et } (BD) \text{ sont sécants, et que leur point d'intersection est } L(-9\ ;\ 3\ ;\ 8)}$

2)c) *D'expérience, les élèves n'aiment pas le mot « symétrique ». Il les déstabilise. La question est pourtant simple, et il suffit de la reformuler si ce mot nous gêne. On nous demande tout simplement de voir si B est le milieu de $[LD]$!*

Le milieu de $[LD]$ a pour coordonnées $(\frac{x_L + x_D}{2} ; \frac{y_L + y_D}{2} ; \frac{z_L + z_D}{2}) = (\frac{-9+11}{2} ; \frac{3+1}{2} ; \frac{8-2}{2})$

Le milieu de $[LD]$ a donc pour coordonnées $(1 ; 2 ; 3)$. Ce sont les coordonnées de B.

B est donc bien le milieu du segment $[LD]$. Autrement dit :

$\boxed{L \text{ est le symétrique de } D \text{ par rapport à } B.}$