Étude de fonctions logarithmiques, primitives

Ayoub Hajlaoui

Le peintre en variations qui se jette à l'assaut
entre tant de fonctions s'emmêle les pinceaux.

Énoncé : *d'après bac S Amérique du Nord, juin 2015* (temps conseillé : 1 heure)

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $u(x) = \ln(x) + x - 3$.

1. Démontrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α, comprise entre 2 et 3.
2. En déduire le signe de $u(x)$ en fonction de x.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)[\ln(x) - 2] + 2$.
On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Déterminer la limite de la fonction f en 0.
2. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Partie C

Soit $\mathcal{C}'$ la courbe d'équation $y = \ln(x)$.

1. Démontrer que les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ ont un seul point commun dont on déterminera les coordonnées.
2. Déterminer une primitive H de la fonction h définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $h(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.
3. Calculer $I = \displaystyle\int_1^{e^2} \frac{2 - \ln x}{x}\,\mathrm{d}x$. Interpréter graphiquement ce résultat.

Correction :

Partie A

1) *« Allô, c'est le corollaire du TVI au téléphone ! Je dois passer sur scène là non ?*
- Oui mais attends un peu qu'on regroupe les bonnes hypothèses... »
Attention aux nuances. Il ne s'agit pas juste de montrer que l'équation donnée a une unique solution sur $[2\ ;3]$ *sans regarder le reste de* $]0\ ;+\infty[$*. Il faut bien montrer que cette équation possède une unique solution* α *dans* $]0\ ;\ +\infty[$*, et que* α *est compris entre* 2 *et* 3.

u est strictement croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$, par somme des fonctions $x \mapsto \ln(x)$ et $x \mapsto x - 3$ strictement croissantes sur $]0\ ;+\infty[$. *(On pouvait dériver aussi mais pas besoin dans une situation aussi simple.)*
u est continue sur $]0\ ;\ +\infty[$ par somme de telles fonctions *(on aurait aussi pu dire car dérivable par somme de telles fonctions, mais là encore, pas besoin).*
Par sommes de limites : $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$. Donc $u(]0\ ;+\infty[) =]-\infty\ ;+\infty[$

Et $0 \in]-\infty\,;+\infty[$.
Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0\,;+\infty[$.

Montrons maintenant que α est compris entre 2 et 3.
$u(2) = \ln(2) + 2 - 3 = \ln(2) - 1 = \ln(2) - \ln(e) < 0$ (par stricte croissance de $\ln$ sur $]0\,;+\infty[$ et vu que $2 < e$)
Et $u(3) = \ln(3) + 3 - 3 = \ln(3) > 0$ (car $\ln(3) > \ln(1)$)
On a donc : $u(2) < 0 < u(3)$. Autrement dit, $u(2) < u(\alpha) < u(3)$.
Par stricte croissance de u sur $]0\,;+\infty[$, on en déduit : $2 < \alpha < 3$.

En conclusion, l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0\,;+\infty[$, et cette solution est comprise entre 2 et 3.

2) u est strictement croissante sur $]0;\ +\infty[$ et $u(\alpha) = 0$. Donc :

- $u(x) < 0$ pour $x \in]0\,;\alpha[$
- $u(x) > 0$ pour $x \in]\alpha\,;+\infty[$
- $u(\alpha) = 0$

On obtient donc le tableau de signe suivant :

x	0		α		$+\infty$
$u(x)$	‖	$-$	0	$+$	

Partie B

1) $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ donc par somme : $\lim\limits_{x\to0^+} 1 - \dfrac{1}{x} = -\infty$. Et $\lim\limits_{x\to0} \ln(x) - 2 = -\infty$
Par produit de limites : $\lim\limits_{x\to0^+} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)[\ln(x) - 2] = +\infty$. Enfin, par somme de limites : $\boxed{\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty}$

2) f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ par produit et somme de telles fonctions.
$\forall x > 0,\quad f'(x) = \dfrac{1}{x^2} \times (\ln(x) - 2) + (1 - \dfrac{1}{x}) \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{\ln(x) - 2}{x^2} + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{\ln(x) - 2 + x - 1}{x^2}$
$= \dfrac{\ln(x) + x - 3}{x^2} = \dfrac{u(x)}{x^2}$, avec $x^2 > 0$. *Et oui, ne pas oublier la partie A !*

Donc, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, $f'(x)$ est du signe de $u(x)$. Le tableau de signe de $f'(x)$ est obtenu grâce à A)1), et on en déduit le tableau de variations de f :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖	↘		↗	

Partie C

1) On résout sur $]0\,;+\infty[$ l'équation $f(x) = \ln(x)$
$f(x) = \ln(x) \iff \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)[\ln(x) - 2] + 2 = \ln(x) \iff \ln(x) - 2 - \dfrac{\ln(x)}{x} + \dfrac{2}{x} + 2 - \ln(x) = 0$
$\iff \dfrac{2 - \ln(x)}{x} = 0 \iff 2 - \ln(x) = 0 \iff \ln(x) = 2 \iff x = e^2$.
L'équation $f(x) = \ln(x)$ admet donc une unique solution sur $]0\,;+\infty[$.
Les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ ont un unique point d'intersection, de coordonnées $\left(e^2\,;\ln(e^2)\right)$.
Accessoirement, c'est aussi le point de coordonnées $\left(e^2, f(e^2)\right)$ *puisque* $\ln(e^2) = f(e^2)$ *(et on a pris* $\ln(e^2)$ *parce que c'est le plus simple)*

Autrement dit, les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ ont un unique point d'intersection, de coordonnées $(e^2\,;2)$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com

2) Pour tout $x > 0$, $h(x) = \frac{1}{x} \times \ln(x) = \ln'(x) \times \ln(x)$

Rappelons qu'une primitive de $v' \times v^n$ *est* $\frac{1}{n+1} v^{n+1}$ *(ici,* $n = 1$ *et* $v = \ln$*).*

Ou encore, rappelons que $(v \times v)' = v'v + vv' = 2vv'$*... Donc* $(\frac{1}{2}vv)' = vv'$*. Ici,* $v = \ln$

$$\boxed{\text{Une primitive sur }]0\,;+\infty[\text{ de } h \text{ est donc } H \text{ définie par } H(x) = \frac{\big(\ln(x)\big)^2}{2}}$$

3) $I = \int_1^{e^2} \frac{2 - \ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_1^{e^2} (\frac{2}{x} - \frac{\ln x}{x})\,\mathrm{d}x$ *(voilà qui est sympa ! On reconnaît* $h(x)$*...)*

$= \int_1^{e^2} \big(2\times\frac{1}{x} - h(x)\big)\mathrm{d}x = [2\ln(x) - H(x)]_1^{e^2} = 2\ln(e^2) - \frac{\big(\ln(e^2)\big)^2}{2} - \big(2\ln(1) - \frac{\big(\ln(1)\big)^2}{2}\big) = 4 - \frac{4}{2} = 2.$

Donc $\boxed{I = 2.}$

Interprétation graphique :

$I = \int_1^{e^2} \big(f(x) - \ln(x)\big)\mathrm{d}x$ d'après C)1)

(Plus exactement, c'est dans le calcul de C)1) qu'on a constaté que $f(x) - \ln(x) = \frac{2 - \ln(x)}{x}$ *)*

Pour l'interprétation géométrique, on a envie de parler d'aire entre C *(courbe de* f*) et* C' *(courbe de* $\ln$*), mais pour cela, il faut justifier que* $f(x) - \ln(x)$ *est positif sur l'intervalle considéré...*

Pour tout $x \in [1;\ e^2]$, $f(x) - \ln(x) = \frac{2 - \ln(x)}{x}$ donc $f(x) - \ln(x)$ est du signe de $2 - \ln(x)$ (car $x > 0$). Or, par croissance de ln sur $]0\,;+\infty[$, , pour tout $x \in [1;\ e^2]$, $\ln(x) \leq \ln(e^2) = 2$ donc $2 - \ln(x) \geq 0$. Donc pour tout $x \in [1;\ e^2]$, $f(x) - \ln(x) \geq 0$

$$\boxed{\text{Donc } I \text{ correspond à l'aire du domaine délimité par les courbes } C \text{ et } C' \text{ et les droites d'équations } x = 1 \text{ et } x = e^2}$$