Images et antécédents complexes

Ayoub Hajlaoui

Mis à part l'unité, tout élément de $\mathbb{C}$
a l'opportunité de se voir cabossé.

Énoncé : (temps conseillé : 45 min) *D'après bac S Pondichéry, mai 2001*

On considère l'application f qui à tout nombre complexe z différent de 1, associe le nombre complexe $f(z) = \dfrac{2 - iz}{1 - z}$.

L'exercice étudie quelques propriétés de f. A est le point d'affixe 1 et B celui d'affixe -2i.

1. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit un réel.
2. On pose $z' = f(z)$.
   (a) Vérifier que i n'a pas d'antécédent par f et exprimer, pour z' différent de i, z en fonction de z'.
   (b) M est le point d'affixe z (z différent de 1) et M' celui d'affixe z' (z' différent de i). Montrer que $OM = \dfrac{M'C}{M'D}$ où C et D sont les points d'affixes respectives 2 et i.
   (c) Montrer que, lorsque le point M décrit le cercle de centre O et de rayon 1 privé du point A, son image M' appartient à une droite que l'on déterminera.
   (d) Montrer que, si M est un point de l'axe des réels, différent de O et de A, alors M' appartient à la droite (CD).

Correction :

1) Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$. Posons $z = x + iy$, avec x et y réels $\big($et $(x, y) \neq (1, 0)\big)$.
On a alors $f(z) = \dfrac{2 - i(x + iy)}{1 - (x + iy)} = \dfrac{2 - ix - i^2 \times y}{1 - x - iy} = \dfrac{2 + y - ix}{1 - x - iy} = \dfrac{(2 + y - ix)(1 - x + iy)}{(1 - x - iy)(1 - x + iy)}$

On a multiplié au numérateur et au dénominateur par le conjugué du dénominateur, pour obtenir au dénominateur un réel (strictement positif)

Donc $f(z) = \dfrac{(2 + y)(1 - x) + i(2 + y)y - ix(1 - x) + xy}{(1 - x)^2 + y^2} = \dfrac{(2 + y)(1 - x) + xy}{(1 - x)^2 + y^2} + i\dfrac{(2 + y)y - x(1 - x)}{(1 - x)^2 + y^2}$

Pour z différent de 1, $f(z)$ est réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle.

Autrement dit, $f(z)$ est réel si et seulement si $\dfrac{(2 + y)y - x(1 - x)}{(1 - x)^2 + y^2} = 0$

Rappelons qu'une fraction est nulle si et seulement si son numérateur est nul (et pas son dénominateur, si le dénominateur est nul, la fraction n'est même pas définie...)
Autrement dit, $f(z)$ est réel si et seulement si $(2 + y)y - x(1 - x) = 0$
$f(z)$ est réel si et seulement si $x^2 + y^2 - x + 2y = 0$
Si on note plutôt $z = x+iy$ (avec x et y réels), on a : $f(z)$ réel si et seulement si $x^2+y^2-x+2y = 0$
$x^2 + y^2 - x + 2y = 0 \iff x^2 - 2\times\frac{1}{2}\times x + \frac{1}{4} + y^2 + 2y + 1 - 1 - \frac{1}{4} = 0 \iff (x - \frac{1}{2})^2 + (y + 1)^2 = \frac{5}{4}$.

J'ai ajouté 1 et $\frac{1}{4}$ pour faire apparaître des identités remarquables, et je les a soustraits aussitôt, pour compenser cet ajout.

On reconnaît l'équation d'un cercle C de centre $\Omega(\frac{1}{2};-1)$ et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$

Rappel : l'équation d'un cercle de centre $\Omega(x_\Omega;y_\Omega)$ est $(x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2=R^2$

Voyons si A (d'affixe 1 donc de coordonnées $(1;0)$) est sur ce cercle, c'est-à-dire si ses coordonnées vérifient l'équation du cercle.
$(1-\frac{1}{2})^2+(0+1)^2=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}$. Le point A est donc sur le cercle !

$\boxed{\text{Finalement, l'ensemble des points } M \text{ d'affixe } z \text{ tels que } f(z) \text{ soit est réel est donc } C\backslash\{A\}}$

(c'est-à-dire le cercle C privé du point A)

2)a) On cherche à montrer qu'il n'existe pas de $z\in\mathbb{C}\backslash\{1\}$ tel que $f(z)=i$.
Il est plus simple de travailler sur l'affirmation « il existe $z\in\mathbb{C}\backslash\{1\}$ tel que $f(z)=i$ », même si c'est le contraire de ce qu'on doit démontrer. Peut-être qu'un raisonnement par l'absurde...

Supposons par l'absurde qu'il existe $z\in\mathbb{C}\backslash\{1\}$ tel que $f(z)=i$.
On a alors $\frac{2-iz}{1-z}=i$. D'où : $2-iz=(1-z)i$. Donc $2-iz=i-iz$. On a alors $2=i$. ABSURDE.
Notre supposition de départ était donc fausse, et on a donc montré qu'il n'existe pas de $z\in\mathbb{C}\backslash\{1\}$ tel que $f(z)=i$. $\boxed{\text{Autrement dit, } i \text{ n'a pas d'antécédent par } f.}$

Pour $z'\neq i$: $z'=\frac{2-iz}{1-z}$. Donc $z'(1-z)=2-iz$. D'où $z'-zz'=2-iz$.
Par suite, $iz-zz'=2-z'$. D'où : $z(i-z')=2-z'$, avec $i-z'\neq 0$ (car $z'\neq i$)
Donc : $\boxed{z=\frac{2-z'}{i-z'}}$ *(il est important de justifier que $i-z'\neq 0$ avant de diviser par $i-z'$)*

2)b) $OM=|z|=\left|\frac{2-z'}{i-z'}\right|=\frac{|2-z'|}{|i-z'|}$. Or, C a pour affixe 2, D a pour affixe i, M' a pour affixe z'. Donc $\boxed{OM=\frac{M'C}{M'D}}$

2)c) Lorsque M décrit le cercle de centre O et de rayon 1 privé du point A, on a $OM=1$.
Donc, d'après 2)b) : $\frac{M'C}{M'D}=1$. Autrement dit : $M'C=M'D$.
Le point M' est donc à égale distance de C et de D. $\boxed{M' \text{ est donc sur la médiatrice de } [CD].}$

2)d) Soit M un point de l'axe des réels, différent de O de A.
Donc $z\in\mathbb{R}\backslash\{0;1\}$. On a alors : $f(z)=\frac{2-iz}{1-z}=\frac{2}{1-z}-i\frac{z}{1-z}$ avec $\frac{2}{1-z}\in\mathbb{R}$ et $\frac{-z}{1-z}\in\mathbb{R}$.
C'est génial, z est un RÉEL, ce qui simplifie beaucoup de choses !
Donc $\frac{2}{1-z}-i\frac{z}{1-z}$ est la forme algébrique de $f(z)=z'$
M' a donc pour coordonnées $(\frac{2}{1-z};-\frac{z}{1-z})$. Montrons que les points M',C et D sont alignés.
$M'(\frac{2}{1-z};-\frac{z}{1-z})$, $C(2;0)$ et $D(0;1)$. $\overrightarrow{M'C}(2-\frac{2}{1-z};\frac{z}{1-z})$ donc $\overrightarrow{M'C}(\frac{-2z}{1-z};\frac{z}{1-z})$ et $\overrightarrow{CD}(-2;1)$

On remarque : $\overrightarrow{M'C}=\frac{z}{1-z}\overrightarrow{CD}$ donc $\overrightarrow{M'C}$ et $\overrightarrow{M'D}$ sont colinéaires.

Autrement dit, $\boxed{M'\in(CD)}$