Inégalité de Jensen

Ayoub Hajlaoui

Humains, sommes, animaux sont en captivité.
Bien classique démo, riche en subtilités.

Énoncé : (temps conseillé : 25 min)

Soit f une fonction convexe sur $\mathbb{R}$.
Autrement dit, on a : $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\forall \lambda \in [0\ ;1]$: $f\big(\lambda a + (1-\lambda)b\big) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$
(inégalité de convexité)
Démontrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a : pour tous $x_1, x_2, ., x_n \in \mathbb{R}$,
pour tous $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \geq 0$ tels que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$, $\quad f\big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\big) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$
(inégalité de convexité généralisée)

Considérations générales :

Une démonstration classique mais riche en passages techniques et intéressants.

Correction :

1) *On nous demande tout simplement de généraliser l'inégalité de convexité (qui compare l'image d'une moyenne pondérée de deux réels à la moyenne pondérée de leurs images) à une moyenne pondérée de plusieurs termes. Un raisonnement par récurrence est tout indiqué...*

Soit $\boldsymbol{P(n)}$: « $\forall x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}$, $\forall \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \geq 0$ tels que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$, $f\big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\big) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$ »
Montrons par récurrence que pour tout entier $\boldsymbol{n} \geq 2$, $\boldsymbol{P(n)}$ est vraie.

Initialisation : pour $\boldsymbol{n} = 2$: pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ avec $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$:
$f\big(\sum_{k=1}^{2} \lambda_k x_k\big) = f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = f\big(\lambda_1 x_1 + (1-\lambda_1) x_1\big)$ avec $\lambda_1 \in [0\ ;1]$. D'après l'inégalité de convexité : $f\big(\lambda_1 x_1 + (1-\lambda_1)x_1\big) \leq \lambda_1 f(x_1) + (1-\lambda_1) f(x_2) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$
On a bien : $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ tels que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $\big(\sum_{k=1}^{2} \lambda_k x_k\big) \leq \sum_{k=1}^{2} \lambda_k f(x_k)$.
$\boldsymbol{P(2)}$ est bien vraie.

Hérédité : Supposons que pour un certain entier $\boldsymbol{n} \geq 2$, $\boldsymbol{P(n)}$ soit vraie, et montrons que $\boldsymbol{P(n+1)}$ est vraie.
Soient $x_1, x_2, ..., x_{n+1} \in \mathbb{R}$, et soient $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{n+1} \geq 0$, tels que $\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k = 1$

$f\big(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\big) = f\big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \ + \ \lambda_{n+1} x_{n+1}\big)$. *Bien. Ce n'est plus qu'une simple somme de deux termes. On va pouvoir utiliser l'inégalité de convexité. Oui mais pas si vite ! Il faut d'abord faire* *apparaître un $\lambda \in [0\ ;1]$ et le $(1-\lambda)$ correspondant ! Par exemple, le λ_{n+1} devant x_{n+1} peut donner satisfaction, mais il va donc falloir faire apparaître $1-\lambda_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$ devant l'autre terme…*

• Si $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \neq 0$: $f\Big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \ +\ \lambda_{n+1}x_{n+1}\Big) = f\left((1-\lambda_{n+1}) \times \frac{1}{1-\lambda_{n+1}} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \ +\ \lambda_{n+1}x_{n+1}\right)$

$= f\left((1-\lambda_{n+1}) \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}} x_k + \ \lambda_{n+1}x_{n+1}\right)$ avec $\lambda_{n+1} \in [0\ ;1]$. D'après l'inégalité de convexité :

$f\Big(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\Big) \leq (1-\lambda_{n+1}) f\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}} x_k\right) \ +\ \lambda_{n+1} f(x_{n+1})$

$f\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}} x_k\right)$… *On va pouvoir utiliser l'hypothèse de récurrence* $\boldsymbol{P(n)}$*… Et oui ! Si on n'est pas attentif aux quantificateurs dans* $\boldsymbol{P(n)}$*, on a l'impression que* $\boldsymbol{P(n)}$ *nous donne l'inégalité pour des* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ *bien précis, et on s'interdit d'utiliser le résultat pour des* $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$ *différents !*

Posons, pour tout $k \in [\![1\ ;n]\!]$, $\mu_k = \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}}$. Pour tout $k \in [\![1\ ;n]\!]$, $\mu_k \geq 0$.

Et $\sum_{k=1}^{n} \mu_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} \times \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$ *Donc on peut utiliser* $\boldsymbol{P(n)}$

J'aurais pu écrire plus simplement : $\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}} = \frac{1}{1-\lambda_{n+1}} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = \frac{1}{1-\lambda_{n+1}} \times (1-\lambda_{n+1}) = 1$

Mais je n'ai pas résisté à l'envie de vous faire manipuler des sommes dans des sommes, même si la manipulation est triviale ici. L'idée étant de ne pas se perdre dans les indices (d'où la prudence en prenant $\boldsymbol{k}$ *et* $\boldsymbol{i}$*, et de reconnaître une constante quand on en voit une, même si elle a une tête comme* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$*…*

D'après $\boldsymbol{P(n)}$:

$(1-\lambda_{n+1}) f\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}} x_k\right) \ +\ \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \ \leq\ (1-\lambda_{n+1}) \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}} f(x_k) + \ \lambda_{n+1} f(x_{n+1})$

Donc $f\Big(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\Big) \leq \frac{1-\lambda_{n+1}}{1-\lambda_{n+1}} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\ f(x_k) + \ \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k\ f(x_k)$

• Si $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1-\lambda_{n+1} = 0$ *Ce cas de figure nous interdit de factoriser par* $1-\lambda_{n+1}$ *!*

Dans ce cas, par somme nulle de réels positifs : $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

On a alors $f\Big(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\Big) = f(\lambda_{n+1}x_{n+1}) = f(x_{n+1})$, et $\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k f(x_k) = f(x_{n+1})$. D'où l'inégalité (au sens large).

Cette inégalité étant valable pour tous $x_1, x_2, ., x_n \in \mathbb{R}$ et pour tous $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \geq 0$ tels que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$, on a bien montré $\boldsymbol{P(n+1)}$. Donc $\boldsymbol{P(n)} \Rightarrow \boldsymbol{P(n+1)}$, et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Le principe de raisonnement par récurrence nous permet de conclure ce qui suit :

pour tout entier $\boldsymbol{n} \geq 2$, on a : pour tous $x_1, x_2, ., x_n \in \boldsymbol{I}$,
pour tous $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \geq 0$ tels que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$, $\quad f\Big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\Big) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com