Le minimum des minima ?

Ayoub Hajlaoui

Pluriel de gens hautains ? Et bien tant pis je l'aime !
Je n'ai pas fait latin mais je frime quand même.

Énoncé : *bac S Nouvelle-Calédonie, nov 2015*

Pour tout réel a, on considère la fonction f_a définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par :

$$f_a(x) = \mathrm{e}^{x-a} - 2x + \mathrm{e}^a.$$

1. Montrer que pour tour réel a, la fonction f_a possède un minimum.
2. Existe-t-il une valeur de a pour laquelle ce minimum est le plus petit possible ?

Correction :

1) Soit $a \in \mathbb{R}$. f_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composée et somme de telles fonctions.
Gardez bien en tête que pour la fonction f_a, a est une constante, et que la variable, c'est x

Pour tout réel x, $f_a'(x) = e^{x-a} - 2$

Rappel : pour u fonction dérivable, $(e^u)' = u'e^u$. Ici, $e^{x-a} = e^{u(x)}$ avec $u(x) = x - a$, et $u'(x) = 1$
La dérivée de la fonction $x \mapsto -2x$ est évidemment $x \mapsto -2$
Mais où est passé e^a ? La dérivée de la fonction exponentielle n'est-elle pas la fonction exponentielle ? Si, si. ¨Mais e^a est une constante ! C'est comme si on vous demandait de dériver e^2 ou e^{-5}. Ou 3^2. Ou $\ln(7)$. Le résultat est le même. 0.

On cherche à déterminer le signe de $f_a'(x)$ en fonction des valeurs de x. Pour ce faire, on résout sur $\mathbb{R}$ l'inéquation $f_a'(x) \geq 0$:
$f_a'(x) \geq 0 \iff e^{x-a} - 2 \geq 0 \iff e^{x-a} \geq 2 \iff \ln(e^{x-a}) \geq \ln(2)$ par croissance de ln sur $]0\ ;\ +\infty[$
$\iff x - a \geq \ln 2 \iff x \geq a + \ln 2$

Donc pour $x \geq a + \ln 2$, $f_a'(x) \geq 0$. Et pour $x \leq a + \ln 2$, $f_a'(x) \leq 0$.
Voici donc le tableau de signe de f_a et le tableau de variations de f_a' sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		$a + \ln 2$		$+\infty$
$f_a'(x)$		$-$	0	$+$	
f_a		$\searrow$		$\nearrow$	

f_a admet possède bien un minimum, atteint en $x = a + \ln 2$.
Ce résultat est valable pour tout $a \in \mathbb{R}$.

On a donc bien montré que $\boxed{\text{pour tout réel } a \text{, la fonction } f_a \text{ possède un minimum.}}$

2) Pour tout réel a, la fonction f_a possède un minimum, et ce minimum est :
$f_a(a+\ln 2) = \mathrm{e}^{a+\ln(2)-a} - 2(a+\ln 2) + \mathrm{e}^a = 2 - 2a - 2\ln(2) + e^a$

On se demande s'il existe une valeur de a telle que $e^a - 2a + 2 - 2\ln(2)$ est minimal.

Pour cela, étudions la fonction $g\ :\ a \mapsto e^a - 2a + 2 - 2\ln(2)$.
Eh oui, une étude de fonction peut en cacher une autre ! Et maintenant, dans ce contexte, a*, qui était une pauvre constante à la question 1), devient la variable !*

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ par somme de telles fonctions.

Pour tout réel a, $g'(a) = e^a - 2$

On cherche à déterminer le signe de $g'(a)$ en fonction des valeurs de a. Pour ce faire, on résout sur $\mathbb{R}$ l'inéquation $g'(a) \geq 0$:
$g'(a) \geq 0 \iff e^a - 2 \geq 0 \iff e^a \geq 2 \iff \ln(e^a) \geq \ln(2)$ par croissance de ln sur $]0\ ;\ +\infty[$
$\iff a \geq \ln 2$

Donc pour $a \geq \ln 2$, $g'(a) \geq 0$. Et pour $a \leq \ln 2$, $g'(a) \leq 0$.
Voici donc le tableau de signe de g et le tableau de variations de g' sur $\mathbb{R}$:

a	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$g'(a)$		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$		$\nearrow$	

g admet possède bien un minimum, atteint pour $a = \ln 2$.

Autrement dit, il existe bien une valeur de a pour laquelle $e^a - 2a + 2 - 2\ln(2)$ est minimal (et cette valeur de a est $\ln 2$).

Même s'il n'est pas demandé, le minimum correspondant est :
$\mathrm{g}(\ln 2) = 2 - 2\ln(2) + 2 - 2\ln(2) = 4 - 4\ln(2)$

Pour conclure, il existe bien une valeur de a pour laquelle le minimum de la fonction f_a est le plus petit possible.

Mathématiquement, on pourrait noter : $\min\limits_{a\,\in\,\mathbb{R}}\ \min\limits_{x\,\in\,\mathbb{R}}\ f_a(x) = 4 - 4\ln(2)$