Modules et carrés

Ayoub Hajlaoui

Modules et carrés vous narguent d'une danse
dont il vous faut parer la belle outrecuidance.

Énoncé : (temps conseillé : 20 minutes)

Soit z un nombre complexe de module 1. Déterminer $|1+z|^2+|1-z|^2$:
1) par le calcul
2) par un raisonnement géométrique.

Correction :

1) *La plupart des élèves penseraient à utiliser la forme algébrique de z :*
$z = a+ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. On sait : $|z| = 1$. Autrement dit, $\sqrt{a^2+b^2} = 1$, c'est-à-dire : $a^2+b^2 = 1$
Et $|1+z|^2+|1-z|^2 = |1+a+ib|^2+|1-a-b|^2 = |(1+a)+ib|^2+|(1-a)-ib|^2 = (1+a)^2+b^2+(1-a)^2+b^2$
Donc $|1+z|^2+|1-z|^2 = 1+2a+a^2+b^2+1-2a+a^2+b^2 = 2+2a^2+2b^2 = 2+2(a^2+b^2)$
Or, $a^2+b^2 = 1$. $\boxed{\text{Donc } |1+z|^2+|1-z|^2 = 4.}$

D'autres pourraient penser à la forme trigonométrique :
$|z| = 1$ donc z s'écrit $z = \cos\theta + i\sin\theta$ avec $\theta \in \mathbb{R}$
$|1+z|^2+|1-z|^2 = |1+\cos\theta+i\sin\theta|^2+|1-\cos\theta-i\sin\theta|^2 = (1+\cos\theta)^2+\sin^2\theta+(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta$
$= 1+2\cos\theta+\cos^2\theta+2\sin^2\theta+1-2\cos\theta+\cos^2\theta = 2+2(\cos^2\theta+\sin^2\theta) = 2+2\times 1$
$\boxed{\text{Donc } |1+z|^2+|1-z|^2 = 4.}$

Voici enfin une troisième méthode que je trouve plus élégante, en ce sens qu'elle ne nécessite de faire intervenir aucune écriture de z (et je l'aime bien parce qu'elle vous fait utiliser une formule trop souvent négligée, alors qu'elle est cruciale).
Rappel : pour tout $Z \in \mathbb{C}$, $|Z|^2 = Z \times \overline{Z}$. D'où :

$|1+z|^2+|1-z|^2 = (1+z)(\overline{1+z})+(1-z)(\overline{1-z}) = (1+z)(\overline{1}+\overline{z})+(1-z)(\overline{1}-\overline{z})$
$= (1+z)(1+\overline{z})+(1-z)(1-\overline{z})$ ($\overline{1} = 1$ car 1 est réel)
$= 1+\overline{z}+z+z\overline{z}+1-\overline{z}-z+z\overline{z} = 2+2z\overline{z} = 2+2|z|^2 = 2+2\times 1$ car $|z| = 1$
. $\boxed{\text{Donc } |1+z|^2+|1-z|^2 = 4.}$

2) Soit M le point d'affixe z, et soit O l'origine du plan complexe. $|z| = 1$ donc $OM = 1$. Autrement, dit, M est un point du cercle (C) de centre O et de rayon 1.
Soit A le point d'affixe -1, et soit B le point d'affixe 1.
$|1+z| = |z-(-1)| = AM$ et $|1-z| = |z-1| = BM$ *Il faudrait montrer que* $AM^2+BM^2 = 4$...

• Si $z \neq -1$ et $z \neq 1$:

$[AB]$ est un diamètre du cercle (C) (évident, mais si on tient à le justifier : $AO = OB = 1$ et O milieu de $[AB]$). Et M est un troisième point de ce cercle, distinct de A et B. *C'est pour ça qu'on a pris $z \neq -1$ et $z \neq 1$, pour que M ne soit confondu ni avec A ni avec B..)*

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com

Le triangle AMB est donc rectangle en M *(résultat de géométrie classique : si dans un cercle, un triangle a deux sommets formant un diamètre, et si son troisième sommet est sur le cercle, alors il est rectangle en ce sommet)*. Donc d'après le théorème de Pythagore, $AB^2 = AM^2 + BM^2$

Autrement dit (en traduisant cette égalité en modules) : $|1-(-1)|^2 = |z-(-1)|^2 + |z-1|^2$
D'où : $|z+1|^2 + |z-1|^2 = 4$ *Bien ! Mais n'oublions pas les cas « $z = 1$ »ou « $z = -1$ »...*

• Si $z = -1$: $|1+z|^2 + |1-z|^2 = |1-1|^2 + |1+1|^2 = 4$

• Si $z = 1$: $|1+z|^2 + |1-z|^2 = |1+1|^2 + |1-1|^2 = 4$

On a bien montré que $\boxed{\text{pour tout nombre complexe } z \text{ de module } 1,\ |1+z|^2 + |1-z|^2 = 4}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com