Prolongement par continuité

Ayoub Hajlaoui

Le segment s'amenuise, mais surtout prenons garde
que le zéro ne nuise à nos lignes hagardes.

Énoncé : (temps conseillé : 20 min)

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{t-\ln(t)}\,\mathrm{d}t$

1) Montrer que f est bien définie et continue sur $]0\,;+\infty[$.
2) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

Correction :

1) *On voudrait montrer que pour tout réel* $x > 0$, $t \mapsto \dfrac{1}{t-\ln(t)}$ *est continue sur* $[x\ ;\ 2x]$. *Mais il faut s'assurer que le dénominateur ne s'annule pas...*

Soit g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(t) = t - \ln(t)$
g est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ par somme de telles fonctions.
Pour tout réel $t > 0$, $g'(t) = 1 - \dfrac{1}{t} = \dfrac{t-1}{t}$, qui est du signe de $t-1$ (car $t > 0$).
D'où le tableau de signe de g' et le tableau de variation de g :

t	0		1		$+\infty$
$g'(t)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
g	$\Vert$	$\searrow$	1	$\nearrow$	

Et $g(1) = 1 - \ln(1) = 1$. g admet1 comme minimum sur $]0\,;+\infty[$, et donc ne s'annule pas.

$h : t \mapsto \dfrac{1}{g(t)}$ est continue sur $]0\,;+\infty[$ par quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions (dérivables donc) continues sur $]0\,;+\infty[$. Elle admet donc une primitive H sur cet intervalle.
En particulier, pour tout $x > 0$, h est continue sur le segment $[x\ ;\ 2x]$ (qui est inclus dans $]0\,;+\infty[$).
Donc f est bien définie sur $]0\,;+\infty[$.
Et $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{t-\ln(t)}\,\mathrm{d}t = \int_x^{2x} h(t)\,\mathrm{d}t = H(2x) - H(x)$
H est continue sur $]0\,;+\infty[$ (et même dérivable de dérivée $H' = h$).
Par composée et somme de fonctions continues, f est continue sur $]0\,;+\infty[$.

$\boxed{f \text{ est donc bien définie et continue sur }]0\,;+\infty[}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com

2) *Il s'agit tout simplement de montrer que* $\lim_{x\to 0} f(x)$ *existe et est finie. Mais savons-nous calculer l'intégrale qui définit* $f(x)$ *? A priori, non. Alors comment espérer calculer cette limite (ou du moins déterminer son existence) ? Peut-être à l'aide d'un encadrement...*

Nous savons que pour tout $x > 0$, $f(x) > 0$, par intégration sur $[x\ ;\ 2x]$ de la fonction $h = \frac{1}{g}$ strictement positive. *(cf tableau de variations de* g*, mais d'ailleurs, que nous dit-il d'autre ?)*

De plus, la fonction g admet 1 comme minimum sur $]0\ ;+\infty[$.
Donc, par décroissance de la fonction inverse sur $]0\ ;+\infty[$:
pour tout $t \in]0\ ;+\infty[$, $h(t) = \frac{1}{g(t)} \leq \frac{1}{1} = 1$

Donc, pour tout $x > 0$, En intégrant sur $[x\ ;2x]$, on obtient, par croissance de l'intégrale :
$\int_x^{2x} h(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_x^{2x} 1\,\mathrm{d}t$. Autrement dit, $f(x) \leq x$

On a donc, pour tout $x > 0$: $0 < f(x) \leq x$.

Le fruit est mûr.

Donc d'après le théorème des gendarmes : $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

f est donc prolongeable par continuité en 0.

Le prolongement de f *est alors la fonction* f_2 *définie sur* $[0\ ;+\infty[$ *par :*

$$\begin{cases} f_2(x) = f(x) & \text{si } x > 0 \\ f_2(0) = 0 \end{cases}$$