Puissances de matrice

Ayoub Hajlaoui

Lorsque les trahisons sur vous pleuvent à verse,
prévenez à raison les fourberies adverses.

Énoncé : (temps conseillé : 25 min)

On considère la matrice $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1) Déterminer les valeurs propres de $\boldsymbol{M}$ et les sous-espaces propres associés, ainsi qu'une base de chacun de ces sous-espaces propres.

2) Montrer qu'on peut écrire $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{D} + \boldsymbol{N}$ où $\boldsymbol{D}$ est une matrice diagonale et, pour tout entier $k \geq 2$, $\boldsymbol{N}^k = 0$.

3) Déterminer, pour tout entier naturel $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{M}^{\boldsymbol{n}}$ en fonction de $\boldsymbol{n}$.

Correction :

1) $\boldsymbol{M}$ est une matrice triangulaire supérieure, donc ses éléments diagonaux déterminent ses valeurs propres. En l'occurrence, les valeurs propres de $\boldsymbol{M}$ sont 1 et 2. Soient $\boldsymbol{E}_1$ et $\boldsymbol{E}_2$ $\left(\subset \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})\right)$ les sous-espaces propres de $\boldsymbol{M}$ respectivement associés aux valeurs propres 1 et 2.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. $X \in E_1 \Longleftrightarrow MX = X \Longleftrightarrow (M - I_3)X = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x, y \in \mathbb{R} \end{cases}$. Donc $E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \ x, y \in \mathbb{R} \right\}$. $\boxed{\text{Donc } E_1 = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}}$

La famille $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, génératrice de E_1, est libre (deux vecteurs non colinéaires). C'est donc une base de E_1.

De même : $X \in E_2 \Longleftrightarrow MX = 2X \Longleftrightarrow (M - 2I_3)X = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} -x + z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} z = x \\ y = 0 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$. $\boxed{\text{Donc } E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix}, \ x \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}$

2) $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. En posant $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

D est diagonale et $N^2 = 0$. Donc, pour tout entier $k \geq 2$, $N^k = N^2 \times N^{k-2} = 0 \times N^{k-2} = 0$.

$\boxed{\text{On peut bien écrire } M = D + N \text{ avec } D \text{ diagonale et, pour tout entier } k \geq 2,\ N^k = 0}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com

3) *Tel qu'il est posé, l'exercice fait preuve de sadisme. Combien d'élèves se rueront vers l'écriture* $\boldsymbol{M}^n = (\boldsymbol{D} + \boldsymbol{N})^n$ *(écriture juste pour l'instant...) pour ensuite utiliser la formule du binôme de Newton, sans avoir vérifié que* $\boldsymbol{D}$ *et* $\boldsymbol{N}$ *commutaient. D'autres, plus prudents, se mettront en tête de le vérifier. Mais, dépités, ils se rendront compte qu'elles ne commutent pas ! Ils se mettront alors à tourner en rond, cherchant dans leurs calculs de* $\boldsymbol{DN}$ *et* $\boldsymbol{ND}$ *une erreur qui n'existe pas.*
Oui, cet énoncé est construit de manière à vous pousser à l'erreur. De vous faire miroiter la tentation et tester votre capacité à tenir sur vos appuis et ne pas oublier les « gestes barrières », même lorsque l'énoncé semble téléphoné.
Que faire alors, pour calculer $\boldsymbol{M}^n$*, si on ne peut pas se servir de 1) ? Si on arrivait à diagonaliser* $\boldsymbol{M}$*, ça nous aiderait pas mal...*

D'après 1), on a $\dim \boldsymbol{E}_1 + \dim \boldsymbol{E}_2 = 3$.

$\boldsymbol{M}$ est donc diagonalisable sur $\mathbb{R}$, et une base de vecteurs propres de $\boldsymbol{M}$ est : $\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$.

Donc $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}^{-1}$ avec $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

Par récurrence immédiate *(ou explicitement d'après le cours selon votre formation)* :

pour tout entier naturel $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{M}^n = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}^n\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}$

$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ *(par résolution directe de système ou méthode du pivot de Gauss)*

Donc, pour tout entier naturel $\boldsymbol{n}$: $\boldsymbol{M}^n = \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

Finalement, pour tout entier naturel, $\boldsymbol{M}^n = \begin{pmatrix}1&0&2^n-1\\0&1&0\\0&0&2^n\end{pmatrix}$

Autre méthode sans se servir de 1) : on calcule $\boldsymbol{M}^2$*,* $\boldsymbol{M}^3$ *(et à la rigueur* $\boldsymbol{M}^4$ *si on n'a rien vu), ça nous donne une idée de conjecture pour l'expression de* $\boldsymbol{M}^n$*, conjecture qu'on démontre ensuite par récurrence.*