# Sinus et inégalité

Ayoub Hajlaoui

*Ce genre d'énoncé qui tient en une ligne*
*demande en vérité quelque idée bien maligne.*

**Énoncé :** *temps conseillé : 25 minutes*

Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout entier naturel $n$, $\left|\sin(nx)\right| \leq n\left|\sin(x)\right|$

**Correction :**

*Typiquement le genre de situation où l'élève pas sûr de lui (et surtout de son apprentissage du cours, en particulier de ses formules de trigonométrie), va se demander s'il n'est pas censé, par hasard, connaître une formule sur* $\sin(nx)$ *qui le tirerait d'affaire... Alors que l'élève qui connaît son cours et sait qu'il les connaît a la certitude de ne pas avoir vu une telle formule, et se met directement à réfléchir sur une astuce, sans passer par l'étape « hésitation sur le cours ». D'où l'importance de bien connaître son cours pour savoir ce qui ne s'y trouve pas.*
*Si on n'a pas de formule en général pour* $\sin(nx)$ *(alors qu'on en a, par exemple, pour* $\sin(2x)$*), que faire pour démontrer cette inégalité pour tout entier naturel* $n$ *? Il ne semble pas farfelu d'essayer une récurrence...*

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel $n$, la propriété $P_n$ : « $|\sin(nx)| \leq n|\sin(x)|$ » est vraie.

Initialisation : d'une part, $|\sin(0x)| = |\sin(0)| = |0| = 0$ et d'autre part, $0|\sin(x)| = 0$ donc l'inégalité au sens large est vérifiée. $P_0$ est bien vraie.

Hérédité : Supposons que pour un certain entier naturel $n$, $P_n$ est vraie, et montrons $P_{n+1}$. Autrement dit, supposons $|\sin(nx)| \leq n|\sin(x)|$, et montrons $\left|\sin\left((n+1)x\right)\right| \leq (n+1)|\sin(x)|$

$\left|\sin\left((n+1)x\right)\right| = \left|\sin(nx+x)\right|$ *Ça, par contre, ça doit faire penser à une formule de trigo !*

*Rappelons que pour tous réels* $a$ *et* $b$*,* $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$

Donc $\left|\sin\left((n+1)x\right)\right| = \left|\sin(nx)\cos(x) + \sin(x)\cos(nx)\right| \leq \left|\sin(nx)\cos(x)\right| + \left|\sin(x)\cos(nx)\right|$

*En effet, l'inégalité triangulaire donne, pour tous réels* $a$ *et* $b$ *:* $|a+b| \leq |a| + |b|$
*Profitons-en pour rappeler aussi* $|ab| = |a| \times |b|$*, ça peut (va) servir...*

On obtient donc : $\left|\sin\left((n+1)x\right)\right| \leq \left|\sin(nx)\right|\left|\cos(x)\right| + \left|\sin(x)\right|\left|\cos(nx)\right|$

*Cool, on va bientôt pouvoir utiliser l'hypothèse de récurrence* $P_n$ *! (J'espère que vous ne l'aviez pas oubliée..) Mais les cosinus gênent un peu, non ?*

Or, pour tout réel $y$, $-1 \leq \cos(y) \leq 1$. Autrement dit : $|\cos(y)| \leq 1$. Donc, en particulier ici (puisque c'est vrai pour tout réel $y$) : $\left|\cos(x)\right| \leq 1$ et $\left|\cos(nx)\right| \leq 1$

En multipliant l'inégalité $\left|\cos(x)\right| \leq 1$ par $\left|\sin(nx)\right|$ (qui est positif) et l'inégalité $\left|\cos(nx)\right| \leq 1$ par $\left|\sin(x)\right|$ (qui est positif), on obtient les inégalités :
$\left|\sin(nx)\right|\left|\cos(x)\right| \leq \left|\sin(nx)\right|$ et $\left|\sin(x)\right|\left|\cos(nx)\right| \leq \left|\sin(x)\right|$

En sommant ces inégalités, on obtient : $\left|\sin(nx)\right|\left|\cos(x)\right| + \left|\sin(x)\right|\left|\cos(nx)\right| \leq \left|\sin(nx)\right| + \left|\sin(x)\right|$

Rappelons qu'on avait : $\left|\sin\left((n+1)x\right)\right| \leq \left|\sin(nx)\right|\left|\cos(x)\right| + \left|\sin(x)\right|\left|\cos(nx)\right|$

Par transitivité de la relation « $\leq$ » , on en déduit : $\left|\sin\left((n+1)x\right)\right| \leq \left|\sin(nx)\right| + \left|\sin(x)\right|$

*Ma cousine est plus petite que mon frère, et mon frère est plus petit que moi. Donc, par transitivité, ma cousine est plus petite que moi...*

Or, d'après l'hypothèse de récurrence $\boldsymbol{P_n}$ : $\left|\sin(nx)\right| \leq n\left|\sin(x)\right|$

Donc : $\left|\sin\left((n+1)x\right)\right| \leq n\left|\sin(x)\right| + \left|\sin(x)\right| = (n+1)\left|\sin(x)\right|$

On a bien montré : $\left|\sin\left((n+1)x\right)\right| \leq (n+1)\left|\sin(x)\right|$. Donc $\boldsymbol{P_{n+1}}$ est vraie.

Donc $\boldsymbol{P_n} \Rightarrow \boldsymbol{P_{n+1}}$. La propriété est héréditaire.

Conclusion : Le principe de raisonnement par récurrence nous permet de conclure ce qui suit :

pour tout entier naturel $n$, $\left|\sin(nx)\right| \leq n\left|\sin(x)\right|$.