Tendre vers n'importe quel réel avec une série de sommes et différences d'inverses

Ayoub Hajlaoui

Crâne en ébullition, mes méninges me lancent
car cette indication fait preuve d'insolence.

Énoncé : (temps conseillé : 40 min) *d'après un exercice de colle MP* de Gabriel Pallier*

Soit α un nombre réel.

1) Montrer qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\{-1;1\}$ telle que $\alpha = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{u_k}{k}$.
Indication : la série harmonique diverge.

2) Cette suite est-elle unique ?

Correction :

1) *« La série harmonique diverge » . L'indication vraiment, vraiment insolente... Oui, merci, c'est l'évidence, on sait que la série* $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k}$ *diverge. Et alors ? Et alors, même si la chose est évidente, ce n'est pas mal du tout de nous y faire penser à cet instant.*

La série harmonique diverge vers $+\infty$. Donc pour tout réel positif M, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > M$. *On a donc la garantie de pouvoir dépasser n'importe quel réel positif M avec une somme partielle de la série harmonique. Et ce résultat reste valable en commençant à $n_0 \in \mathbb{N}^*$ (et pas forcément à 1) : pour tout réel positif M, il existe $n \geq n_0$ tel que* $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} \frac{1}{k} > M$ *(puisque la série* $\displaystyle\sum_{k\geq n_0} \frac{1}{k}$ *diverge)*
Si le réel α est positif, on a donc la garantie de pouvoir dépasser α par une somme partielle de la série harmonique. Mais que faire ensuite ? Ensuite, on redescend. Jusqu'à ce que...

Si α est positif, posons n_α le plus petit entier naturel non nul vérifiant : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > \alpha$.

Définissons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ comme suit : $u_1 = 1$ et, pour tout entier naturel non nul n :
• si $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{k} \leq \alpha$, $u_{n+1} = 1$ • et si $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{k} > \alpha$, $u_{n+1} = -1$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est ainsi bien définie (par son premier terme et par récurrence).
Pourquoi dans le cas où, par chance, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{k} = \alpha$, *faut-il poser $u_{n+1} = 1$? A priori, vu qu'on atteint exactement α avec cette somme partielle* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{k}$, *on aimerait bien s'arrêter là... Mais*

on ne le peut pas ! Il faut que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ soit bien définie (et cette suite doit prendre ses valeurs dans $\{-1;1\}$). On ne peut donc pas se permettre de la laisser « en chantier » lorsqu'on atteint exactement α.

Montrons maintenant qu'avec une telle suite (u_n), on a bien : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{u_k}{k} = \alpha$

Dès que n atteint n_α (défini plus haut), c'est-à-dire dès que $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{u_k}{k}$ dépasse α (ce « dès que » étant permis en vertu de ce qui a été dit précédemment sur la divergence de la série harmonique), vu la définition de la suite (u_n), on ajoute des $-\dfrac{1}{k}$ jusqu'à ce qu'on repasse en dessous de α, puis on ajoute des $\dfrac{1}{k}$ jusqu'à ce qu'on dépasse α, et ainsi de suite...

Intuitivement, à partir du moment où l'on se met à osciller ainsi autour de α avec les sommes partielles $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{u_k}{k}$, ces sommes partielles peuvent devenir aussi proches qu'on veut de α. Maintenant, il va falloir démontrer proprement cette intuition, en gardant bien en tête le fait que lesdites oscillations ne commencent réellement qu'à partir de n_0 et le premier dépassement.

On sait déjà : $u_{n_\alpha} = 1$ (par définition de (u_n)).

- **Si** $n_\alpha > 1$, on sait aussi : $\sum\limits_{k=1}^{n_\alpha-1} \dfrac{u_k}{k} \leq \alpha \leq \sum\limits_{k=1}^{n_\alpha} \dfrac{u_k}{k}$. Autrement dit : $\sum\limits_{k=1}^{n_\alpha} \dfrac{u_k}{k} - \dfrac{u_{n_\alpha}}{n_\alpha} \leq \alpha \leq \sum\limits_{k=1}^{n_\alpha} \dfrac{u_k}{k}$

Ou encore : $\sum\limits_{k=1}^{n_\alpha} \dfrac{u_k}{k} - \dfrac{1}{n_\alpha} \leq \alpha \leq \sum\limits_{k=1}^{n_\alpha} \dfrac{u_k}{k}$. Donc $\left|\sum\limits_{k=1}^{n_\alpha} \dfrac{u_k}{k} - \alpha\right| \leq \dfrac{1}{n_\alpha}$

- **et si** $n_\alpha = 1$: $0 \leq \alpha \leq \sum\limits_{k=1}^{n_\alpha} \dfrac{u_k}{k} = \dfrac{u_1}{1} = 1$. L'inégalité $\left|\sum\limits_{k=1}^{n_\alpha} \dfrac{u_k}{k} - \alpha\right| \leq \dfrac{1}{n_\alpha}$ reste vraie.

Dans tous les cas, $\left|\sum\limits_{k=1}^{n_\alpha} \dfrac{u_k}{k} - \alpha\right| \leq \dfrac{1}{n_\alpha}$. *Si on généralise cette inégalité à tout $n \geq n_\alpha$...*

Montrons par récurrence que pour tout $n \geq n_0$, $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{u_k}{k} - \alpha\right| \leq \dfrac{1}{n}$

<u>Initialisation</u> : on vient de montrer cette inégalité pour $n = n_0$.

<u>Hérédité</u> : Supposons que pour un certain entier naturel $n \geq n_0$, $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{u_k}{k} - \alpha\right| \leq \dfrac{1}{n}$

Deux cas de figure sont possibles :

• si $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{u_k}{k} \leq \alpha$, $u_{n+1} = 1$. On a alors $0 \leq \alpha - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{u_k}{k} \leq \dfrac{1}{n}$. Et donc (en ajoutant $-\dfrac{1}{n+1}$ à chaque membre de l'encadrement) : $-\dfrac{1}{n+1} \leq \alpha - \sum\limits_{k=1}^{n+1} \dfrac{u_k}{k} \leq \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{n(n+1)} \leq \dfrac{1}{n+1}$

Donc $\left|\sum\limits_{k=1}^{n+1} \dfrac{u_k}{k} - \alpha\right| \leq \dfrac{1}{n+1}$

• si $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{u_k}{k} > \alpha$, $u_{n+1} = -1$. On a alors $0 \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{u_k}{k} - \alpha \leq \dfrac{1}{n}$. Et donc (en ajoutant $-\dfrac{1}{n+1}$ à chaque membre de l'encadrement) : $-\dfrac{1}{n+1} \leq \sum\limits_{k=1}^{n+1} \dfrac{u_k}{k} - \alpha \leq \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{n(n+1)} \leq \dfrac{1}{n+1}$

Donc $\left|\sum\limits_{k=1}^{n+1} \dfrac{u_k}{k} - \alpha\right| \leq \dfrac{1}{n+1}$ La propriété est bien héréditaire.

Conclusion : Le principe de raisonnement par récurrence nous permet de conclure ce qui suit :

pour tout entier naturel $n \geq n_0$, $\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{k} - \alpha\right| \leq \frac{1}{n}$.

On peut donc conclure, d'après le théorème des gendarmes : $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{k} = \alpha$

Pour $\alpha \geq 0$, on a bien montré l'existence d'une suite (u_n) d'éléments de $\{-1; 1\}$ telle que $\alpha = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{u_k}{k}$. *Mais pour $\alpha < 0$?*

Si $\alpha < 0$, $-\alpha > 0$ et, en vertu de ce qui précède, il existe une suite (u_n) d'éléments de $\{-1; 1\}$ telle que $-\alpha = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{u_k}{k}$. Donc : $\alpha = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-u_k}{k}$, où $(-u_n)$ est aussi une suite d'éléments de $\{-1; 1\}$

On a bien montré que pour tout réel α, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\{-1; 1\}$ telle que $\alpha = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{u_k}{k}$

2) Pour $\alpha \geq 0$, en posant $v_0 = -1$ (et non pas $u_0 = 1$ comme dans la question 1), et en définissant (v_n) par la même relation de récurrence que (u_n) en 1)), on obtient, de même : $\alpha = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{v_k}{k}$. Et la suite (v_n) est différente de la suite (u_n) (puisque $v_1 \neq u_1$)

Pour un réel α donné, il n'y a donc pas unicité de $(u_n) \in \{-1; 1\}^{\mathbb{N}^*}$ telle que $\alpha = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{u_k}{k}$.