Une somme qui met en nage

Ayoub Hajlaoui

Énoncé : (temps conseillé : 20 min)

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = e^{-n}\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}$
Démontrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Correction :

« Et » ne veut pas dire « puis ». On a le droit de faire d'une pierre deux coups...

Pour tout entier naturel n, $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{-n}n^k}{k!}$.
On n'a pas fait grand-chose, mais sous cette forme, que reconnait-on ? Il semble y avoir un lien avec la loi de Poisson de paramètre n. Et oui, le titre a été choisi uniquement pour le jeu de mot.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, et suivant la loi de Poisson de paramètre 1.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Par stabilité de la loi de Poisson, S_n suit la loi de Poisson de paramètre n. *Comme une odeur de théorème limite central...*

On a alors, pour tout $n \geq 1$: $\boxed{u_n = \sum_{k=0}^{n} P(S_n = k) = P(S_n \leq n)}$

Et il va falloir faire tendre n vers $+\infty$...

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $E(X_k) = \mu = 1$ et $V(X_k) = \sigma^2 = 1$ (loi de Poisson de paramètre 1)
Posons, pour tout $n \geq 1$, $\overline{X}_n = \frac{S_n}{n}$. Et $Z_n = \sqrt{n} \times \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma} = \sqrt{n}\left(\overline{X}_n - 1\right)$

D'après le théorème limite central, (Z_n) converge en loi vers une variable aléatoire Z suivant la loi normale centrée réduite.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = P(\frac{S_n}{n} \leq 1) = P(\overline{X}_n \leq 1) = P(\overline{X}_n - 1 \leq 0) = P\left(\sqrt{n}(\overline{X}_n - 1) \leq 0\right)$
Donc $u_n = P(Z_n \leq 0) = F_n(0)$, où F_n est la fonction de répartition de Z_n.

Soit Φ la fonction de répartition de Z. En tout réel a où Φ est continue (donc en tout $a \in \mathbb{R}$), par définition de la convergence en loi : $\lim_{n\to+\infty} F_n(a) = \Phi(a)$

En particulier : $\lim_{n\to+\infty} F_n(0) = \Phi(0) = \frac{1}{2}$. Autrement dit : $\lim_{n\to+\infty} P(Z_n \leq 0) = \frac{1}{2}$

En conclusion : $\boxed{(u_n) \text{ converge et } \lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com