Actions de groupes et formule de Burnside

Ayoub Hajlaoui

Il est venu l'été des fécondes moissons
Pour qui sait bien compter de plus d'une façon.

Énoncé : (temps conseillé : 45 min)

Soit X un ensemble non vide.

On dit qu'un groupe $(G,*)$ agit sur l'ensemble X s'il existe une application $\varphi : G \times X \to X$ vérifiant :

- $\forall x \in X,\ \varphi(e,x) = x$ où e est l'élément neutre de G
- $\forall x \in X,\ \forall g_1, g_2 \in G,\ \varphi\big(g_1, \varphi(g_2,x)\big) = \varphi(g_1 * g_2, x)$

On rappelle que l'ensemble $\sigma(X)$ des bijections de X dans lui-même, muni de la composition $\circ$, est un groupe.

Enfin, pour tout ensemble E, on pourra noter $|E|$ le cardinal de E.

1) Montrer que $(G,*)$ agit sur X si et seulement si il existe un morphisme de groupes $\Phi : (G,*) \to \big(\sigma(X), \circ\big)$

2) Soit $(G,*)$ un groupe agissant sur X. Il existe donc une application φ vérifiant les hypothèses indiquées dans l'énoncé. Par commodité, pour tout $g \in G$, pour tout $x \in X$, on pourra noter $g.x = \varphi(g,x)$. On a donc : $\forall x \in X, e.x = x$ et $\forall g_1, g_2 \in G,\ g_1.(g_2.x) = (g_1 * g_2).x$

Pour tout $x \in X$, on appelle orbite de x et on note Gx la partie de X définie par :

$Gx = \{\varphi(g,x)\ ,\ g \in G\} = \{g.x\ ,\ g \in G\}$

Montrer que les orbites Gx sont des classes d'équivalence, et donc qu'elles forment une partition de X.

3) Pour tout $x \in E$, on appelle stabilisateur de x l'ensemble $\text{Stab}(x) = \{g \in G,\ g.x = x\}$.

Et pour tout $g \in G$, on appelle fixateur de g l'ensemble $\text{Fix}(g) = \{x \in X,\ g.x = x\}$.

Soit $x \in X$ et soit $y \in Gx$. Soit $A_y = \{g \in G,\ g.x = y\}$.

a) Justifier que A_y est non vide. Dans la suite, g_0 est un élément de A_y.

b) Soit f la fonction définie sur $\text{Stab}(x)$ par $f(g) = g_0 * g$. Montrer que $f : \text{Stab}(x) \to A_y$ est bijective. En déduire pour tout $x \in E$, $|Gx| \times |\text{Stab}(x)| = |G|$

4) En déduire que le nombre d'orbites Gx est $N = \dfrac{1}{|G|} \displaystyle\sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)|$.

C'est la formule de Burnside. On pourra considérer l'ensemble $C = \{(g,x) \in G \times X,\ g.x = x\}$

Correction :

1) Si $(G,*)$ agit sur X, on dispose d'une application φ vérifiant les hypothèses de l'énoncé.

Quel morphisme de groupes pourrait-on construite entre $(G,*)$ et $\big(\sigma(X),\circ\big)$? Je ne vois honnêtement pas mille options...

Soit Φ la fonction qui à tout élément g de G associe l'application $\Phi(g) : X \mapsto X$ définie par $\Phi(g)(x) = \varphi(g,x)$.

Montrons d'abord que pour tout $g \in G$, $\Phi(g) \in \sigma(X)$ (c'est-à-dire que $\Phi(g)$ est bijective)

J'ai un a priori sur l'application réciproque éventuelle...

$(G,*)$ étant un groupe, soit g^{-1} le symétrique de g dans G.
Pour tout $x \in X$, $\big(\Phi(g^{-1}) \circ \Phi(g)\big)(x) = \Phi(g^{-1})\big(\varphi(g,x)\big) = \varphi\big(g^{-1}, \varphi(g,x)\big)$. Donc, par hypothèse de l'énoncé : $\big(\Phi(g^{-1}) \circ \Phi(g)\big)(x) = \varphi(g^{-1} * g, x) = \varphi(e,x) = x$. Donc $\Phi(g^{-1}) \circ \Phi(g) = \mathrm{Id}_X$
On montre de même que $\Phi(g) \circ \Phi(g^{-1}) = \mathrm{Id}_X$ (Id_X étant l'application identité sur X)
On a donc bien montré : pour tout g de G, $\Phi(g) \in \sigma(X)$

De plus, pour tous g_1, g_2 de G, pour tout x de X :
$\Phi(g_1 * g_2)(x) = \varphi\big((g_1 * g_2), x\big) = \varphi\big(g_1, \varphi(g_2,x)\big) = \varphi\big(g_1, \Phi(g_2)(x)\big) = \Phi(g_1)\big(\Phi(g_2)(x)\big)$
$= \big(\Phi(g_1)\circ\Phi(g_2)\big)(x)$.
Donc : $\Phi(g_1 * g_2) = \Phi(g_1)\circ\Phi(g_2)$.
$\Phi : (G,*) \to \big(\sigma(X), \circ\big)$ est bien un morphisme de groupes.
On a montré que si $(G,*)$ agit sur X, alors il existe un morphisme de groupes de $(G,*)$ vers $\big(\sigma(X), \circ\big)$

Réciproquement, s'il existe un morphisme de groupes $\Phi : (G,*) \to \big(\sigma(X), \circ\big)$:
soit l'application $\varphi : G \times X \to X$ définie par $\varphi(g,x) = \Phi(g)(x)$.
Pour tout $x \in X$, $\varphi(e,x) = \Phi(e)(x)$. Φ étant un morphisme de groupes, l'image du neutre e de $(G,*)$ par Φ est le neutre de $\big(\sigma(X), \circ\big)$, c'est-à-dire Id_X. Donc $\Phi(e)(x) = \mathrm{Id}_X(x) = x$.
On a montré : $\forall x \in X,\ \forall x \in X,\ \varphi(e,x) = x$
De plus : $\forall x \in X,\ \forall g_1, g_2 \in G,\ \varphi\big(g_1, \varphi(g_2,x)\big) = \varphi\big(g_1, \Phi(g_2)(x)\big) = \Phi(g_1)\big(\Phi(g_2)(x)\big)$
$= \big(\Phi(g_1)\circ\Phi(g_2)\big)(x) = \Phi(g_1 * g_2)(x)$ car Φ est un morphisme de groupes
$= \varphi(g_1 * g_2, x)$ par définition de φ
On a montré : $\forall x \in X,\ \forall g_1, g_2 \in G,\ \varphi\big(g_1, \varphi(g_2,x)\big) = \varphi(g_1 * g_2, x)$
$(G,*)$ agit donc sur l'ensemble X.

En conclusion, $(G,*)$ agit sur X si et seulement si il existe un morphisme de groupes $\Phi : (G,*) \to \big(\sigma(X), \circ\big)$

2) Tout d'abord, pour tout élément x de X, $x \in Gx$ car $x = e.x = \varphi(e,x)$. Donc tout élément de X appartient à une orbite.
Dès lors, il suffit de montrer que la relation $\mathcal{R}$: « est dans une même orbite que » est une classe d'équivalence sur X.
$\mathcal{R}$ est évidemment réflexive ($\forall x \in X$, x est dans une même orbite que x) et symétrique (si x est dans une même orbite que y, y est dans une même orbite que x).

Montrons que $\mathcal{R}$ est transitive.
Soient x, y et $z \in X$ tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$. Il existe donc a et $b \in X$ tels que $x, y \in Ga$ et $y, z \in Gb$. Autrement dit, par définition de Ga et Gb, il existe $g_1, g_2, g_3, g_4 \in G$ tels que $x = g_1.a$, $y = g_2.a$, $y = g_3.b$ et $z = g_4.b$.
En particulier, $g_2.a = g_3.b$ Donc : $g_3^{-1}.(g_2.a) = g_3^{-1}.(g_3.b)$
C'est-à-dire : $(g_3^{-1} * g_2).a = (g_3^{-1} * g_3).b = e.b = b$. Donc $b = (g_3^{-1} * g_2).a$
D'où : $z = g_4.\big((g_3^{-1} * g_2).a\big) = (g_4 * g_3^{-1} * g_2).a$, avec $g_4 * g_3^{-1} * g_2 \in G$. Donc $z \in Ga$.
Comme on avait déjà : $x \in Ga$, on en conclut que x et z appartiennent à une même orbite. Donc : $x\mathcal{R}z$.
La relation $\mathcal{R}$ est bien transitive.
$\mathcal{R}$ est donc une relation d'équivalence sur X.
Les orbites Gx sont donc des classes d'équivalence et forment une partition de X.

3)a) $y \in Gx$. Donc, par définition, il existe $g \in G$ tel que $y = g.x$, c-à-d que A_y est non vide.

3)b) Pour tout $g \in \mathrm{Stab}(x)$, $g.x = x$. Et $f(g) = g_0 * g$. Montrons que $f(g) \in A_y$.
$f(g).x = (g_0 * g).x = g_0.(g.x) = g_0.x$ (car $g \in \mathrm{Stab}(x)$). Or, $g_0 \in A_y$ donc $g_0.x = y$.

On a donc montré : $f(g).x = y$. Autrement dit, $f(g) \in A_y$.
f est bien une application de $\mathrm{Stab}(x)$ dans A_y.
Soit $g' \in A_y$. Montrons que l'équation $f(g) = g'$, d'inconnue g, admet une unique solution dans $\mathrm{Stab}(x)$. $f(g) = g' \iff g_0 * g = g' \iff g = g_0^{-1} * g'$ (on a multiplié par g_0^{-1} à gauche)
L'équation $f(g) = g'$ admet une unique solution dans G, et c'est $g_0^{-1} * g'$. Il suffit de montrer que cette solution est dans $\mathrm{Stab}(x)$.
$(g_0^{-1} * g').x = g_0^{-1}.(g'.x) = g_0^{-1}.y$ (car $g' \in A_y$) Et on a aussi : $g_0 \in A_y$, donc $y = g_0.x$.
Finalement, $(g_0^{-1} * g').x = g_0^{-1}.(g_0.x) = (g_0^{-1} * g_0).x = e.x = x$. On a bien : $g_0^{-1} * g' \in \mathrm{Stab}(x)$.
On a montré : $\forall g' \in A_y,\ \exists!\ g \in \mathrm{Stab}(x),\ g' = f(y)$.

$\boxed{\text{L'application } f : \mathrm{Stab}(x) \to A_y \text{ est bien bijective.}}$

Pourquoi avoir pensé à montrer la bijectivité « directement », sans le faire en deux étapes (injectivité et surjectivité) ? Car ça semblait faisable, notamment en se disant qu'on pouvait facilement accéder à l'antécédent de tout élément de A_y, en utilisant le symétrique g_0^{-1} de g_0.

On nous demande ensuite une relation entre cardinaux... Mais pourquoi donc nous avoir fait démontrer cette bijectivité ?
Pour tout $x \in X$, pour tout $y \in Gx$, on a montré l'existence d'une bijection entre $\mathrm{Stab}(x)$ et A_y. Donc : $\forall x \in X, \forall y \in Gx,\ |\mathrm{Stab}(x)| = |A_y|$

De plus, $|Gx|$ est le nombre d'éléments y de X qui peuvent s'écrire $y = g.x$, avec $g \in G$.
Mais à un élément y de Gx peuvent correspondre plusieurs éléments g de G... Ce sont justement les éléments de A_y ! Donc $|G| = |Gx| \times |A_y|$. Finalement : $\boxed{|G| = |Gx| \times |\mathrm{Stab}(x)|}$

4) *L'énoncé nous conseille de considérer l'ensemble C des couples (g, x) tels que $g.x = x$. Pour obtenir un résultat sur des cardinaux, il faut très probablement s'intéresser au cardinal de cet ensemble...*
On peut compter l'ensemble des couples de C de deux manières différentes :
- *en faisant la somme, pour chaque g de G, du nombre d'éléments x de X vérifiant $g.x = x$*
- *ou en faisant la somme, pour chaque x de X, du nombre d'éléments g de G vérifiant $g.x = x$*

$|C| = \sum_{g\in G} |\mathrm{Fix}(g)|$ (*première manière de compter*). Et $|C| = \sum_{x\in X} |\mathrm{Stab}(x)|$ (*seconde manière*)
Donc $\sum_{g\in G} |\mathrm{Fix}(g)| = \sum_{x\in X} |\mathrm{Stab}(x)|$. *Mais comment faire intervenir le nombre d'orbites ?*
Donc, d'après 3)b) : $\displaystyle\sum_{g\in G} |\mathrm{Fix}(g)| = \sum_{x\in X} \frac{|G|}{|Gx|}$ $\quad (\forall x \in X, x = e.x \in Gx$ *donc* $|Gx| \neq 0)$
D'où : $\displaystyle\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} |\mathrm{Fix}(g)| = \sum_{x\in X} \frac{1}{|Gx|}$
Mais pourquoi cette somme serait-elle égale au nombre N d'orbites ?

D'après 2), les orbites Gx forment une partition de X. Notons O l'ensemble de ces orbites.
On a alors : $\displaystyle\sum_{x\in X} \frac{1}{|Gx|} = \sum_{o\in O}\sum_{x\in O} \frac{1}{|Gx|}$ *Diviser pour régner...*
Or, pour toute orbite O, pour tout $x \in O$, $Gx = O$ (et donc $|Gx| = |O|$).
Donc : $\displaystyle\sum_{o\in O}\sum_{x\in O} \frac{1}{|Gx|} = \sum_{o\in O}\sum_{x\in O} \frac{1}{|O|} = \sum_{o\in O} \frac{1}{|O|}\sum_{x\in O} 1 = \sum_{o\in O} \frac{1}{|O|} \times |O| = \sum_{o\in O} 1 = N$

En conclusion : $\boxed{N = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} |\mathrm{Fix}(g)|}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com