Encadrement et suites

Ayoub Hajlaoui

Garde présidentielle accompagnant la suite ?
Escorte exponentielle empêchant toute fuite !

Énoncé : (temps conseillé : 1 heure) *D'après EDHEC ECE, mai 2016*

Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes positifs telle que $\forall n \in \mathbb{N} : e^{-\sqrt{u_n}} \leq u_n - n \leq e^{-\sqrt{n}}$
Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n - n$.

1) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
2) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$
3) Établir que pour tout réel $x \geq 0$, $\sqrt{1+x} \leq 1 + \dfrac{x}{2}$
4) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $e^{-\sqrt{u_n}} \geq e^{-\sqrt{n}} \exp\left(\dfrac{-v_n}{2\sqrt{n}}\right)$
5) Démontrer enfin que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n - n}{e^{-\sqrt{n}}} = 1$

Correction :

1) *L'énoncé nous donne un encadrement de* $u_n - n$, *mais rien ne nous oblige à l'utiliser entièrement pour cette question. Surtout s'il s'agit de trouver une limite infinie (et donc pas de théorème des gendarmes en vue).*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e^{-\sqrt{u_n}} \leq u_n - n$ donc $e^{-\sqrt{u_n}} + n \leq u_n$, avec $e^{-\sqrt{u_n}} > 0$. D'où $n \leq e^{-\sqrt{u_n}} + n$.
Donc $n \leq e^{-\sqrt{u_n}} + n \leq u_n$ et, par transitivité : $n \leq u_n$.
Enfin, par théorème de comparaison, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$

2) *Théorème des gendarmes que nous avions rejeté pour la question précédente, voici ton retour en grâce !*

On sait : $\forall n \in \mathbb{N}$, $e^{-\sqrt{u_n}} \leq v_n \leq e^{-\sqrt{n}}$
D'une part : $\lim\limits_{n\to+\infty} -\sqrt{n} = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$ donc par composée de limites : $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-\sqrt{n}} = 0$
D'autre part, d'après 1), $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. Donc, par composée de limites : $\lim\limits_{n\to+\infty} -\sqrt{u_n} = -\infty$
et enfin (toujours par composée de limites en utilisant le fait que $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$) : $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-\sqrt{u_n}} = 0$.

Le théorème des gendarmes nous permet de conclure ce qui suit : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0}$

3) Pour tout réel $x \geq 0$, $\sqrt{1+x}$ et $1 + \dfrac{x}{2}$ sont tous les deux positifs.
Les comparer revient donc à comparer leurs carrés (par croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$)
D'une part, $\left(\sqrt{1+x}\right)^2 = 1 + x$. D'autre part, $\left(1 + \dfrac{x}{2}\right)^2 = 1 + x + \dfrac{x^2}{4}$.

On a donc $\left(1 + \dfrac{x}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{1+x}\right)^2 = \dfrac{x^4}{4} \geq 0$. Donc $\left(1 + \dfrac{x}{2}\right)^2 \geq \left(\sqrt{1+x}\right)^2$

Finalement, on a bien, $\boxed{\text{pour tout } x \geq 0 : \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}}$

4) *Déjà, l'inégalité $e^{-\sqrt{u_n}} \leq u_n - n$ ne va pas nous servir (en tous cas, pas tout de suite), puisque l'inégalité qu'on veut obtenir avec $e^{-\sqrt{u_n}}$ est dans l'autre sens. Mais alors que faire ? Peut-être exprimer u_n en fonction de v_n ? (Puisqu'il y a du v_n dans l'inégalité qu'on veut...)*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = v_n + n$ donc $e^{-\sqrt{u_n}} = e^{-\sqrt{v_n+n}}$.

Ah ! Peut-être est-il possible d'utiliser le résultat de la 3, si l'on peut faire apparaître du 1 dans la racine carrée...

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $e^{-\sqrt{u_n}} = \exp\left(-\sqrt{v_n+n}\right) = \exp\left(-\sqrt{n(\frac{v_n}{n}+1)}\right)$

$= \exp\left(-\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{v_n}{n}}\right)$. *Ah voilà, on voit comment utiliser la 3) maintenant !*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{v_n}{n} \geq 0$ (car $v_n = u_n - n \geq 0$) *pour pouvoir appliquer 3*

Donc, d'après 3) : $\sqrt{1+\frac{v_n}{n}} \leq 1 + \frac{\frac{v_n}{n}}{2} = 1 + \frac{v_n}{2n}$. En multipliant cette inégalité par $-\sqrt{n} < 0$, on obtient : $-\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{v_n}{n}} \geq -\sqrt{n}\left(1+\frac{v_n}{2n}\right)$. Autrement dit : $-\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{v_n}{n}} \geq -\sqrt{n} - \frac{v_n}{2\sqrt{n}}$

Par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, il s'ensuit que :
$\exp\left(-\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{v_n}{n}}\right) \geq \exp\left(-\sqrt{n} - \frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right)$. D'où :
$e^{-\sqrt{u_n}} \geq \exp\left(-\sqrt{n}\right)\exp\left(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right)$. On a bien montré : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \ e^{-\sqrt{u_n}} \geq e^{-\sqrt{n}} \exp\left(\frac{-v_n}{2\sqrt{n}}\right)}$

5) *Oh, encore une limite (finie) !*

On sait que pour tout entier naturel n : $e^{-\sqrt{u_n}} \leq u_n - n \leq e^{-\sqrt{n}}$. En divisant par $e^{-\sqrt{n}} > 0$:
$\forall n \in \mathbb{N}$: $\frac{e^{-\sqrt{u_n}}}{e^{-\sqrt{n}}} \leq \frac{u_n - n}{e^{-\sqrt{n}}} \leq 1$.

Or, d'après 4 : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $e^{-\sqrt{n}}\exp\left(\frac{-v_n}{2\sqrt{n}}\right) \leq e^{-\sqrt{u_n}}$. Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exp\left(\frac{-v_n}{2\sqrt{n}}\right) \leq \frac{e^{-\sqrt{u_n}}}{e^{-\sqrt{n}}}$.

On obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, cette succession d'inégalités : $\exp\left(\frac{-v_n}{2\sqrt{n}}\right) \leq \frac{e^{-\sqrt{u_n}}}{e^{-\sqrt{n}}} \leq \frac{u_n - n}{e^{-\sqrt{n}}} \leq 1$

En particulier : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \exp\left(\frac{-v_n}{2\sqrt{n}}\right) \leq \frac{u_n - n}{e^{-\sqrt{n}}} \leq 1}$

D'après 2), $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$ donc par quotient de limites : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{-v_n}{2\sqrt{n}} = 0$

Et, par composée de limites (*par continuité de la fonction exp en 0*) :
$\lim\limits_{n \to +\infty} \exp\left(\frac{-v_n}{2\sqrt{n}}\right) = \exp(0) = 1$.

Le théorème des gendarmes (cf inégalité encadrée en bleu) permet de conclure : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n - n}{e^{-\sqrt{n}}} = 1}$

Plus tard, quand vous serez grands, vous noterez : $u_n - n \underset{n \to +\infty}{\sim} e^{-\sqrt{n}}$