Étude de fonction, expo, ln, encadrement d'intégrale

Ayoub Hajlaoui

Effort de longue haleine dont le point final
confère une joie saine, un ouf phénoménal.

Énoncé : (temps conseillé : 2 heures) *d'après bac S juin 1997 métropole gp 1 bis*

PARTIE A

Soit la fonction φ définie dans $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \mathrm{e}^x + x + 1$.

1. Montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ a une solution et une seule α et donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}
2. En déduire le signe de $\varphi(x)$ sur $\mathbb{R}$.

PARTIE B

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}$

et soit $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ du plan.

1. Déterminer le sens de variation de f.
2. Montrer que $f(\alpha) = \alpha + 1$ et en déduire un encadrement de $f(\alpha)$.
3. Soit T la tangente à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0.
   Donner une équation de T et étudier la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à T.
4. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
5. Dresser le tableau de variations complet de f.
6. Étudier la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à la droite D d'équation $y = x$.

PARTIE C

On considère la fonction g, définie sur $[0\,;\,1]$ par : $g(x) = \ln\left(1 + \mathrm{e}^x\right)$.

On note $(\mathcal{C}')$ la courbe représentative de g dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, I le point défini par $\overrightarrow{\mathrm{OI}} = \vec{\imath}$, A le point d'abscisse 0 de $(\mathcal{C}')$ et B son point d'abscisse 1.

1. Étudier brièvement les variations de g.
2. Donner une équation de la tangente en A à $(\mathcal{C}')$.
3. On note P l'intersection de cette tangente avec le segment [IB]. Calculer les aires des trapèzes OIPA et OIBA.
4. On admet que la courbe $(\mathcal{C}')$ est située entre les segments [AP] et [AB]. Montrer alors que : $\ln(2) + \dfrac{1}{4} \leqslant \displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \ln\sqrt{2(1+\mathrm{e})}$.
5. Déterminer une primitive sur $[0\,;\,1]$ de la fonction h définie par $h(x) = f(x) + g(x)$
6. Justifier que : $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \ln(1+\mathrm{e}) - \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$.
7. En déduire un encadrement de $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Correction :

PARTIE A

1) *Oui, c'est téléphoné, on voit de loin le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, mais d'abord, regroupons proprement ses hypothèses.*

• φ est continue sur $\mathbb{R}$ par somme de telles fonctions.
• φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ par somme de la fonction exponentielle strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et de la fonction affine $x \mapsto x+1$ strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (coefficient directeur $1>0$)
Oui, on pouvait aussi dériver..
• $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, donc, par somme de limites : $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x) = -\infty$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, donc, par somme de limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$.
Et $0 \in \left]-\infty\ ;\ +\infty\right[$

Le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires nous permet de conclure ce qui suit :
$\boxed{\text{l'équation } \varphi(x)=0 \text{ a une unique solution } \alpha \text{ sur } \mathbb{R}.}$

À la calculatrice, on obtient : $\varphi(-1,28) < 0 < \varphi(-1,27)$. Autrement dit, $\varphi(-1,28) < \varphi(\alpha) < \varphi(-1,27)$.
La stricte croissance de φ sur $\mathbb{R}$ nous permet de conclure : $\boxed{-1,28 < \alpha < -1,27}$

2) φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $\varphi(\alpha)=0$.
Donc, pour tout $x>\alpha$, $\varphi(x) > \varphi(\alpha) = 0$ et, pour tout $x<\alpha$, $\varphi(x) < \varphi(\alpha) = 0$.
On obtient donc le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$\varphi(x)$		$-$	0	$+$	

PARTIE B

1) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par produit et quotient, dont le dénominateur ne s'annule pas, de telles fonctions.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ où $u(x) = xe^x$, $u'(x) = e^x + xe^x$ (dérivée d'un produit), $v(x) = e^x+1$, $v'(x) = e^x$.
Donc, pour tout réel x : $f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} = \dfrac{e^x(1+x)\times(e^x+1) - xe^x \times e^x}{(e^x+1)^2}$
$= \dfrac{e^x\big((1+x)(e^x+1) - xe^x\big)}{(e^x+1)^2} = \dfrac{e^x(e^x+1+xe^x+x-xe^x)}{(e^x+1)^2} = \dfrac{e^x(e^x+x+1)}{(e^x+1)^2}$ *Tiens tiens tiens...*
Ainsi, pour tout réel x : $f'(x) = \dfrac{e^x\varphi(x)}{(e^x+1)^2}$, où φ est la fonction introduite en partie A.
Pour tout réel x, $e^x>0$ et $(e^x+1)^2>0$, donc $f'(x)$ est du signe de $\varphi(x)$, signe déterminé en A)2).
On a donc le tableau de signe de $f'(x)$, puis tableau de variations de f :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

$\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur }]-\infty\ ;\ \alpha] \text{ et strictement croissante sur } [\alpha\ ;\ +\infty[}$

2) $f(\alpha) = \dfrac{\alpha e^{\alpha}}{e^{\alpha}+1}$ *Mais que sait-on sur α au juste ?*

α est solution de l'équation $\varphi(x) = e^x + x + 1$. Autrement dit, $e^{\alpha} + \alpha + 1 = 0$. Ou encore : $e^{\alpha} = -\alpha - 1$.
Dans l'idée de remplacer les e^{α} dans l'expression de $f(\alpha)$, puisqu'il n'y en a pas dans l'expression qu'on doit obtenir.

Donc $f(\alpha) = \dfrac{\alpha(-\alpha-1)}{-\alpha-1+1} = \dfrac{\alpha(-\alpha-1)}{-\alpha} = -(-\alpha-1)$. Finalement, $\boxed{f(\alpha) = \alpha + 1}$.

On a montré en A)1) : $-1,28 < \alpha < -1,27$. Ensuite : $-1,28+1 < \alpha+1 < -1,27+1$.
Enfin : $\boxed{-0,28 < f(\alpha) < -0,27}$

3) $T : y = f'(0)(x-0) + f(0)$ avec $f(0) = \dfrac{0e^0}{e^0+1} = 0$ et $f'(0) = \dfrac{e^0(e^0+0+1)}{(e^0+1)^2} = \dfrac{2}{2^2} = \dfrac{1}{2}$

$\boxed{T \text{ a donc pour équation : } y = \frac{1}{2}x}$

Pour étudier la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à T, on étudie le signe de la différence $f(x) - \dfrac{1}{2}x$.

Pour tout réel x, $f(x) - \dfrac{1}{2}x = \dfrac{xe^x}{e^x+1} - \dfrac{x}{2} = \dfrac{2xe^x - x(e^x+1)}{2(e^x+1)} = \dfrac{2xe^x - xe^x - x}{2(e^x+1)} = \dfrac{xe^x - x}{2(e^x+1)}$

Donc : $f(x) - \dfrac{1}{2}x = \dfrac{x(e^x-1)}{2(e^x+1)}$. Or, pour tout réel x, $2(e^x+1) > 0$.

$f(x) - \dfrac{1}{2}x$ est du signe de $x(e^x-1)$. $e^x - 1 \geq 0 \iff e^x \geq 1 \iff x \geq 0$ (par croissance de ln sur $\mathbb{R}_+^*$)

On obtient donc le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	
$e^x - 1$		$-$	0	$+$	
$f(x) - \frac{x}{2}$		$+$	0	$+$	

$\boxed{\text{On en déduit que } (\mathcal{C}) \text{ est au-dessus de } T \text{ sur } \mathbb{R}, \text{ et (évidemment*) que } (\mathcal{C}) \text{ et } T \text{ se coupent en } x = 0.}$
**évidemment car T est la tangente à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse* 0.

4) *Un rapide calcul direct pour nous rendre compte qu'en $+\infty$, on tombe sur une forme indéterminée.*

$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{xe^x}{e^x(1+e^{-x})} = \dfrac{x}{1+e^{-x}}$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{e^x} = 1$.

Donc, par quotient de limites : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

Un rapide calcul direct pour nous rendre compte qu'en $-\infty$... on ne tombe pas sur une forme indéterminée !

$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{xe^x}{e^x+1}$ avec $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ par croissance comparée, et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x + 1 = 1$.

Donc, par quotient de limites : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0}$

5) De B)1), B)2) et B)4), on déduit le tableau de variations complet de f :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f	0 $\searrow$	$\alpha + 1$	$\nearrow$ $+\infty$

Un bon réflexe à adopter systématiquement après obtention d'un tableau de variations complet : s'assurer que les valeurs et limites ne rentrent pas en contradiction avec les variations. Dans notre cas, $\alpha + 1 < 0$ (cf encadrement obtenu en B)2)), donc le tableau de variations semble cohérent (ça ne nous garantit pas qu'il n'y a pas d'erreur d'inattention par ailleurs, mais en tous cas pas d'absurdité qui saute aux yeux).

6) *Même méthode qu'en B)3).* D est la droite d'équation $y = x$.
Pour étudier la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à D, on étudie le signe de la différence $f(x) - x$.
Pour tout réel x, $f(x) - x = \dfrac{xe^x}{e^x+1} - x = \dfrac{xe^x - x(e^x+1)}{e^x+1} = \dfrac{xe^x - xe^x - x}{e^x+1} = -\dfrac{x}{e^x+1}$ avec $e^x + 1 > 0$
Donc $f(x) - x$ est du signe de $-x$. On obtient donc le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x) - x$		$+$	0	$-$	

$(\mathcal{C})$ est au-dessus de D sur $]-\infty;\ 0[$, en-dessous de D sur $]0\ ;+\infty[$, et $(\mathcal{C})$ et D se coupent en $x = 0$.

PARTIE C

1) *Brièvement ? Oui, on peut, sans passer par la dérivée.*

La fonction $x \mapsto 1 + e^x$ est strictement croissante sur $[0\ ;\ 1]$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + e^x \in\ ]0\ ;\ +\infty[$.
Et la fonction ln est strictement croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.
Donc, par composée de fonctions strictement croissantes, g est strictement croissante sur $[0\ ;\ 1]$.

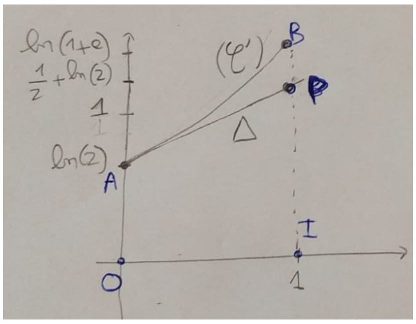
2) g est dérivable sur $[0\ ;\ 1]$ par composée de fonctions dérivables, et pour tout réel x, $g'(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$

Rappelons en effet : $\Big(\ln(u)\Big)' = \dfrac{u'}{u}$

Soit Δ la tangente en A (d'abscisse 0) à $(\mathcal{C}')$. $\Delta : y = g'(0)(x - 0) + g(0)$
$g(0) = \ln(1 + e^0) = \ln(2)$ et $g'(0) = \dfrac{e^0}{1+e^0} = \dfrac{1}{2}$.

La tangente Δ en A à $(\mathcal{C}')$ a donc pour équation : $y = \dfrac{1}{2}x + \ln(2)$

3) *Un petit croquis pour y voir plus clair...*



Notons A_{OIPA} l'aire du trapèze $OIPA$ (en unités d'aires).
Les points A et B, d'abscisses respectives 0 et 1, sont sur la courbe de g.
$A\Big(0, g(0)\Big)$ donc $A\Big(0, \ln(2)\Big)$. Et $B\Big(1, g(1)\Big)$ donc $B\Big(1, \ln(1+e)\Big)$
Le point P est sur le segment $[IB]$, donc il a pour abscisse 1. Et il est sur Δ d'équation $y = \dfrac{1}{2}x + \ln(2)$, donc il a pour ordonnée $\dfrac{1}{2} \times 1 + \ln(2) = \dfrac{1}{2} + \ln(2)$. Donc $P\Big(1, \dfrac{1}{2} + \ln(2)\Big)$

$A_{OIPA} = \dfrac{OA + IP}{2} \times OI = \dfrac{\ln(2) + \frac{1}{2} + \ln(2)}{2} \times 1$. Donc $\boxed{A_{OIPA} = \ln(2) + \dfrac{1}{4}}$

Rappelons que l'aire d'un trapèze de petite base b, de grande base B et de hauteur h est $\dfrac{b+B}{2} \times h$
Ici, $b = OA$, $B = IP$ *et* $h = OI$

De même, $A_{OIBA} = \dfrac{OA + IB}{2} \times OI = \dfrac{\ln(2) + \ln(1+e)}{2} \times 1 = \dfrac{\ln\big(2(1+e)\big)}{2}$. Donc $\boxed{A_{OIBA} = \dfrac{\ln\big(2(1+e)\big)}{2}}$

4) La fonction g est continue et positive sur $[0\ ;\ 1]$. Donc $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire (en unités d'aires) du domaine délimité par la courbe $(\mathcal{C}')$, l'axe des abscisses, le segment $[OA]$ (ou la droite d'équation $x = 0$) et le segment $[IB]$ (ou la droite d'équation $x = 1$).
On admet, d'après l'énoncé, que la courbe $(\mathcal{C}')$ est située entre les segments $[AP]$ et $[AB]$.
Donc $A_{OIPA} \leq \displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x \leq A_{OIBA}$. Autrement dit : $\ln(2) + \dfrac{1}{4} \leq \displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x \leq \dfrac{\ln\big(2(1+e)\big)}{2}$
Or, $\dfrac{\ln\big(2(1+e)\big)}{2} = \ln\left([2(1+e)]^{\frac{1}{2}}\right) = \ln\sqrt{2(1+\mathrm{e})}$ *Rappelons en effet :* $b\ln(a) = \ln(a^b)$
Finalement : $\boxed{\ln(2) + \dfrac{1}{4} \leq \displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x \leq \ln\sqrt{2(1+\mathrm{e})}}$

5) Pour tout $x \in [0\ ;\ 1]$, $h(x) = \dfrac{xe^x}{e^x+1} + \ln(1+e^x)$ *On est censés reconnaître une primitive de cette horreur ?*
Remarquons que $h(x) = x \times \dfrac{e^x}{e^x+1} + 1 \times \ln(1+e^x)$
En posant $u(x) = x$, on a : pour tout $x \in [0\ ;\ 1]$, $h(x) = u(x) \times g'(x) + u'(x) \times g(x)$
Une primitive sur $[0\ ;\ 1]$ de la fonction h est donc la fonction H définie sur $[0\ ;\ 1]$ par $H(x) = u(x)g(x)$
Autrement dit, $\boxed{\text{une primitive sur } [0\ ;\ 1] \text{ de } h \text{ est } H \text{ définie sur } [0\ ;\ 1] \text{ par } H(x) = x\ln(1+e^x)}$

6) *Si on ne sait pas primitiver f, on vient de voir qu'on sait primitiver $f + g$...*

D'après la question précédente : $\displaystyle\int_0^1 \big(f(x) + g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x = \Big[H(x)\Big]_0^1 = H(1) - H(0)$
$= 1\ln(1+e) - 0\ln(1+1)$.
Donc $\displaystyle\int_0^1 \big(f(x) + g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \ln(1+e)$. Donc, par linéarité : $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \ln(1+e)$
Finalement : $\boxed{\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \ln(1+\mathrm{e}) - \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x.}$

7) D'après C)5) : $\ln(2) + \dfrac{1}{4} \leq \displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x \leq \ln\sqrt{2(1+\mathrm{e})}$
Donc : $-\ln(2) - \dfrac{1}{4} \geq -\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x \geq -\ln\sqrt{2(1+\mathrm{e})}$ *(on a multiplié chaque membre par $-1 < 0$)*
D'où : $\ln(1+e) - \ln(2) - \dfrac{1}{4} \geq \ln(1+e) - \displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x \geq \ln(1+e) - \ln\sqrt{2(1+\mathrm{e})} = \ln\left(\dfrac{1+e}{\sqrt{2(1+e)}}\right)$

En conclusion, un encadrement de $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ est le suivant :

$$\boxed{\ln\left(\sqrt{\frac{1+e}{2}}\right) \leq \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \leq \ln\left(\frac{1+e}{2}\right) - \frac{1}{4}}$$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com