Intégrales en vrac

Ayoub Hajlaoui

La plume pour épée dressée contre le vent,
j'aime le dessiner : ce signe fait savant.

Énoncé : (temps conseillé : 1 heure)

Calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}\,\mathrm{d}x \qquad B = \int_0^1 \frac{1}{e^x+1}\,\mathrm{d}x \qquad C = \int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x \qquad D = \int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x+2)}\,\mathrm{d}x$$

Correction :

1) Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ 1]$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1}$.
f est continue sur $[0\ ;\ 1]$ donc l'intégrale A est bien définie.
On remarque : $f(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = e^x + 1$.
En posant $F(x) = \ln\big(u(x)\big)$ ($u(x)$ étant strictement positif), on a : $\forall x \in [0\ ;\ 1]$, $F'(x) = f(x)$.
Donc F est une primitive de f sur $[0\ ;\ 1]$. $\forall x \in [0\ ;\ 1]$, $F(x) = \ln(e^x+1)$

$$A = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \big[F(x)\big]_0^1 = F(1) - F(0) = \ln(e^1+1) - \ln(e^0+1) = \ln(e+1) - \ln(2)$$

Donc $\boxed{A = \ln\left(\frac{e+1}{2}\right)}$

2) Soit g la fonction définie sur $[0\ ;\ 1]$ par $g(x) = \dfrac{1}{e^x+1}$.
g est continue sur $[0\ ;\ 1]$ donc l'intégrale B est bien définie.

Que faire pour trouver une primitive de g ? On peut peut-être se servir de la 1)...
$\forall x \in [0\ ;\ 1]$, $g(x) = \dfrac{e^x+1-e^x}{e^x+1} = \dfrac{e^x+1}{e^x+1} - \dfrac{e^x}{e^x+1} = 1 - \dfrac{e^x}{e^x+1} = 1 - f(x)$ (où f est la fonction introduite en 1)
Une primitive de g est donc G définie sur $[0\ ;\ 1]$ par $G(x) = x - F(x) = x - \ln(e^x+1)$

Donc $B = \displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \big[x - \ln(e^x+1)\big]_0^1 = 1 - \ln(e^1+1) - \big(0 - \ln(e^0+1)\big) = 1 - \ln(e+1) + \ln(2)$

Donc $\boxed{B = 1 - \ln\left(\frac{e+1}{2}\right)}$

3) Soit h la fonction définie sur $[e\ ;\ e^2]$ par $h(x) = \dfrac{1}{x\ln(x)}$.
h est continue sur $[e\ ;\ e^2]$ donc l'intégrale C est bien définie.
On remarque : $h(x) = \dfrac{1}{x} \times \dfrac{1}{\ln(x)} = u'(x) \times \dfrac{1}{u(x)} = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ où $u(x) = \ln(x)$
Une primitive de h sur $[e\ ;\ e^2]$ est donc H définie par $H(x) = \ln\big(|u(x)|\big) = \ln\big(|\ln(x)|\big)$
Or, pour tout x tel que $e \leq x \leq e^2$, on a $\ln(e) \leq \ln(x) \leq \ln(e^2)$ par croissance de ln sur $\mathbb{R}_+^*$.
Autrement dit, pour tout $x \in [e\ ;\ e^2]$, $1 \leq \ln(x) \leq 2$. En particulier, $\ln(x) > 0$. Donc sur cet intervalle, $|\ln(x)| = \ln(x)$.

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com

On a donc : pour tout $x \in [e\ ;\ e^2]$, $H(x) = \ln\big(\ln(x)\big)$

Donc $C = \displaystyle\int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x = \big[\ln\big(\ln(x)\big)\big]_e^{e^2} = \ln\big(\ln(e^2)\big) - \ln\big(\ln(e)\big) = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2) - 0$

Donc $\boxed{C = \ln(2)}$

4) Soit k la fonction définie sur $[0\ ;\ 1]$ par $k(x) = \dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$.

k est continue sur $[0\ ;\ 1]$ donc l'intégrale D est bien définie.

Sous cette forme-là, il semble difficile de trouver une primitive de k... Une idée intéressante (qu'il est honnêtement difficile d'avoir si on ne l'a pas déjà vue) serait d'écrire cette fraction comme une somme de fractions plus simples. Pas d'inquiétude, en Terminale, l'idée sera généralement suggérée par l'énoncé.

On cherche deux réels a et b tels que $\forall x \in [0\ ;\ 1]$, $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x+2}$

c'est-à-dire : $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)} = \dfrac{a(x+2)+b(x+1)}{(x+1)(x+2)} = \dfrac{ax+2a+bx+b}{(x+1)(x+2)} = \dfrac{(a+b)x+2a+b}{(x+1)(x+2)}$

On veut donc : $\forall x \in [0\ ;\ 1]$, $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)} = \dfrac{(a+b)x+2a+b}{(x+1)(x+2)}$

Il suffit de prendre $a+b=0$ et $2a+b=1$ c-à-d $b=-a$ et $2a-a=1$ donc $a=1$ et $b=-1$

On a donc : $\forall x \in [0\ ;\ 1]$, $k(x) = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x+2}$

Donc $k(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)} - \dfrac{v'(x)}{v(x)}$ en posant $u(x) = x+1$ et $v(x) = x+2$

Une primitive de k sur $[0\ ;\ 1]$ est donc la fonction K définie par $K(x) = \ln(x+1) - \ln(x+2)$ car $x+1>0$ et $x+2>0$ sur cet intervalle. Pour tout $x \in [0\ ;\ 1]$, $K(x) = \ln\big(\dfrac{x+1}{x+2}\big)$

Donc $D = \displaystyle\int_0^1 k(x)\,\mathrm{d}x = \big[K(x)\big]_0^1 = K(1) - K(0) = \ln\big(\frac{1+1}{1+2}\big) - \ln\big(\frac{0+1}{0+2}\big) = \ln\big(\frac{2}{3}\big) - \ln\big(\frac{1}{2}\big)$

$= \ln\big(\frac{2}{3} \times 2\big)$. Finalement, $\boxed{D = \ln\big(\frac{4}{3}\big)}$