Matrices symplectiques et valeurs propres

Ayoub Hajlaoui

Énoncé : (temps conseillé : 25 min) *D'après agrégation externe 2016*

Soit n un entier naturel non nul. On notera I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
J désignera la matrice $\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$
Enfin, on notera $\mathrm{Sp}(2n)$ l'ensemble des matrices symplectiques réelles de taille $2n$, à savoir :
$\mathrm{Sp}(2n) = \{M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}),\ {}^tMJM = J\}$ (${}^tM$ désignant la transposée de M)

1) Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{R}[X]$. Montrer que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est racine de P, alors $\overline{\lambda}$ est aussi racine de P, de même multiplicité que λ.

2) Soit $M \in \mathrm{Sp}(2n)$. Montrer que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de M, alors $\overline{\lambda}$ et $\dfrac{1}{\lambda}$ aussi, avec la même multiplicité (algébrique) que λ.

Correction :

1) *En explicitant P, il est assez simple de montrer que si λ est racine de P, alors $\overline{\lambda}$ aussi.*

Pour tout polynôme P non nul de $\mathbb{R}[X]$, il existe $d \in \mathbb{N}^*$ et $(a_0, a_1, ...a_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ tels que $P(X) = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$. Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est racine de P : $\sum_{k=0}^{d} a_k \lambda^k = 0$. Par passage au conjugué et par propriétés du conjugué : $\sum_{k=0}^{d} a_k \left(\overline{\lambda}\right)^k = 0$. Donc $\overline{\lambda}$ est aussi racine de P.

Mais qu'en est-il de la multiplicité ? On peut utiliser le fait que tout polynôme réel se factorise en produit de polynômes de degré 1 à racines réelles et de polynômes de degré 2 à racines complexes conjuguées. Il faut alors argumenter avec précision pour justifier l'égalité des multiplicités. Mais l'on peut aussi, dans un registre plus léger, plus élégant, passer par les dérivées successives...

Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est racine de P, de multiplicité $m \in \mathbb{N}^*$: pour tout $k \in [\![0\ ;\ m-1]\!]$, $P^{(k)}(\lambda) = 0$ et $P^{(m)}(\lambda) \neq 0$. Autrement dit, λ est racine de $P, P', ..., P^{(m-1)}$ mais pas de $P^{(m)}$.
On a montré plus haut que si λ est racine de P, $\overline{\lambda}$ l'est aussi. Ce qui était valable pour P l'est aussi pour ses dérivées successives, et on a en fait, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'équivalence suivante :
λ est racine de $P^{(k)} \iff \overline{\lambda}$ est racine de $P^{(k)}$

Donc si $\lambda \in \mathbb{C}$ est racine de P, de multiplicité $m \in \mathbb{N}^*$: pour tout $k \in [\![0\ ;\ m-1]\!]$, $P^{(k)}\left(\overline{\lambda}\right) = 0$ et $P^{(m)}\left(\overline{\lambda}\right) \neq 0$. Autrement dit, $\overline{\lambda}$ est aussi racine de P, de multiplicité m.

En conclusion, si $\lambda \in \mathbb{C}$ est racine de P, alors $\overline{\lambda}$ est aussi racine de P, de même multiplicité.

2) *On nous a parlé à la question précédente de racines conjuguées de polynômes réels. Et on nous parle maintenant de valeurs propres de M et de leurs multiplicités algébriques. Il me semble évident que l'on doive introduire le polynôme caractéristique de M.*

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com

Les valeurs propres de $\boldsymbol{M}$ sont les racines de son polynôme caractéristique $\boldsymbol{P_M}$.
Or, $\boldsymbol{M}$ étant une matrice à coefficients réels, $\boldsymbol{P_M} \in \mathbb{R}[X]$.
Si λ est valeur propre de $\boldsymbol{M}$, λ est racine de $\boldsymbol{P_M}$ et, en vertu de 1), $\overline{\lambda}$ est aussi racine de $\boldsymbol{P_M}$, de même multiplicité que λ.
Il était important de préciser $\boldsymbol{P_M} \in \mathbb{R}[X]$, *le résultat de 1) ne restant pas valable sur* $\mathbb{C}[X]$

Autrement dit, si λ est valeur propre de $\boldsymbol{M}$, alors $\overline{\lambda}$ aussi, et de même multiplicité algébrique.

Quid de $\dfrac{1}{\lambda}$ *? Déjà, cela voudrait dire que* λ *est non nul.* 0 *ne serait pas valeur propre de* $\boldsymbol{M}$. $\boldsymbol{M}$ *serait inversible... À démontrer bien évidemment. Mais comment ?*

$\boldsymbol{M} \in \mathrm{Sp}(2n)$. Donc ${}^t\boldsymbol{M}\boldsymbol{J}\boldsymbol{M} = \boldsymbol{J}$

Personnellement, quand je vois la matrice $\boldsymbol{J}$, *j'ai bien envie de calculer* $\boldsymbol{J}^2$...

Un simple calcul matriciel par blocs donne : $\boldsymbol{J}^2 = -\boldsymbol{I}_{2n}$ (donc $\boldsymbol{J}$ est inversible d'inverse $-\boldsymbol{J}$)
Donc $\boldsymbol{J} \times {}^t\boldsymbol{M}\boldsymbol{J}\boldsymbol{M} = -\boldsymbol{I}_{2n}$. Ou encore : $-\boldsymbol{J}\,{}^t\boldsymbol{M}\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{M} = \boldsymbol{I}_{2n}$. $\boldsymbol{M}$ est donc inversible et $\boldsymbol{M}^{-1} = -\boldsymbol{J}\,{}^t\boldsymbol{M}\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}^{-1}\,{}^t\boldsymbol{M}\boldsymbol{J}$

${}^t\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{M}^{-1}$ sont donc semblables, et ont le même polynôme caractéristique.
Par ailleurs, $\boldsymbol{M}$ et ${}^t\boldsymbol{M}$ ont le même polynôme caractéristique.
On en conclut que $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{M}^{-1}$ ont le même polynôme caractéristique.

Maintenant, faisons d'une pierre deux coups et montrons que si λ *est valeur propre de* $\boldsymbol{M}$, *alors* $\dfrac{1}{\lambda}$ *aussi, et de même multiplicité.*

Soit $\boldsymbol{P_{M^{-1}}}$ le polynôme caractéristique de $\boldsymbol{M}^{-1}$.
$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\boldsymbol{P_M}(x) = \boldsymbol{P_{M^{-1}}}(x) = \det(\boldsymbol{M}^{-1} - x\boldsymbol{I}_{2n}) = \det\left(\boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{I}_{2n} - x\boldsymbol{M})\right) = \det(\boldsymbol{M}^{-1})\det(\boldsymbol{I}_{2n} - x\boldsymbol{M})$
$= \dfrac{1}{\det(\boldsymbol{M})}\det\left(x(\dfrac{1}{x}\boldsymbol{I}_{2n} - \boldsymbol{M})\right)$
Que fait-on ? Nous essayons de faire réapparaitre $\boldsymbol{P_M}$. *Dans l'idéal,* $\boldsymbol{P_M}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

D'où : $\boldsymbol{P_M}(x) = \dfrac{x^{2n}}{\det(\boldsymbol{M})}\det\left(\dfrac{1}{x}\boldsymbol{I}_{2n} - \boldsymbol{M}\right) = \dfrac{x^{2n}(-1)^{2n}}{\det(\boldsymbol{M})}\det\left(\boldsymbol{M} - \dfrac{1}{x}\boldsymbol{I}_{2n}\right)$

Rappelons en effet que pour $\boldsymbol{a}$ *scalaire et* $\boldsymbol{M}$ *matrice carrée de taille* $\boldsymbol{n}$, $\det(\boldsymbol{a}\boldsymbol{M}) = \boldsymbol{a}^n\det(\boldsymbol{M})$

Par suite, pour tout $x \neq 0$, $\boldsymbol{P_M}(x) = \dfrac{x^{2n}}{\det(\boldsymbol{M})}\boldsymbol{P_M}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

On en déduit que si $\lambda \in \mathbb{C}^*$ est racine de $\boldsymbol{P_M}$, alors $\dfrac{1}{\lambda}$ est aussi racine de $\boldsymbol{P_M}$, et de même multiplicité.

On peut normalement se satisfaire de l'égalité ci-dessus pour conclure quant à l'égalité des multiplicités. Si l'on veut détailler un peu plus, on peut passer par une factorisation de $\boldsymbol{P_M}$, *ou s'intéresser à ses dérivées successives, qu'on évalue en* $\dfrac{1}{\lambda}$

En conclusion, si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de $\boldsymbol{M}$, alors $\overline{\lambda}$ et $\dfrac{1}{\lambda}$ aussi, avec la même multiplicité algébrique que λ.

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com