Relation d'ordre entre endomorphismes symétriques

Ayoub Hajlaoui

Énoncé : (temps conseillé : 25 min) *D'après Mines-Ponts PSI, 2012*

Soit un entier naturel $n \geq 2$. On note S_n l'ensemble des endomorphismes symétriques de $\mathbb{R}^n$. On admet que S_n est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$. Le produit scalaire euclidien de $\mathbb{R}^n$ est noté (x, y).

Pour tout $u \in S_n$, on dit que u est positif, et on note $u \in S_n^+$, si : $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ (u(x)\ , x) \geq 0$

On note donc S_n^+ l'ensemble des endomorphismes positifs de S_n.

Enfin, pour tous $u, v \in S_n$, on note $u \geq v$ si et seulement si $u - v \in S_n^+$

1) Démontrer que la relation $\geq$ est une relation d'ordre sur S_n.

2) Est-elle totale ?

Correction :

1) Pour tout $u \in S_n$, $u - u = 0_{\mathcal{L}(E)} \in S_n^+$.
En effet, $0_{\mathcal{L}(E)} \in S_n$*, et pour tout* $x \in \mathbb{R}^n$, $(0_{\mathcal{L}(E)}(x), x) = (0, x) = 0 \geq 0$
Donc pour tout $u \in S_n$, $u \geq u$. $\geq$ est bien réflexive.

Soient u et $v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \geq v$ et $v \geq u$. Autrement dit, $u - v \in S_n^+$ et $v - u \in S_n^+$.
On veut montrer que $u = v$ *pour pouvoir conclure que* $\geq$ *est antisymétrique.*
On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ ((u-v)(x), x) \geq 0$ et $(v-u)(x), x) \geq 0$
Donc (linéarité à gauche du produit scalaire) : $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ ((u-v)(x), x) \geq 0$ et $-((u-v)(x), x) \geq 0$
D'où : $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ ((u-v)(x), x) = 0.$ (*)

Attention à ne pas tomber dans le piège de conclure tout de suite que $(u-v)(x) = 0$*. « Ben si, non ? Puisque son produit scalaire avec tout vecteur* x *de* $\mathbb{R}^n$ *donne* 0*... Justement, ce n'est pas n'importe quel vecteur* x *ici, il faut que ce soit le même que dans* $(u-v)(x)$ *!*
A contrario, si on avait trouvé : $\forall y \in \mathbb{R}^n$, $((u-v)(x), y) = 0$*, on aurait conclu :* $(u-v)(x) = 0$

$u \in S_n$ et $v \in S_n$. S_n étant un espace vectoriel : $u - v \in S_n$. D'après le théorème spectral, l'endomorphisme $u - v$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
Il existe donc une base $(e_1, e_2, ..., e_n)$ de vecteurs propres de $u - v$, respectivement associés aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ (pas forcément distinctes).
Au cas où on en aurait besoin, il existe même une base orthonormale de vecteurs propres de $u - v$*, mais pas sûr que ça serve ici...*

D'après (*) : pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, $((u-v)(e_i), e_i) = 0$. Autrement dit : $(\lambda_i e_i, e_i) = 0$
C'est-à-dire : $\lambda_i ||e_i||^2 = 0$. Les e_i étant des vecteurs propres, donc non nuls, on en conclut :
$\forall i \in [\![1; n]\!],\ \lambda_i = 0$. Donc : $\forall i \in [\![1; n]\!],\ (u-v)(e_i) = \lambda_i e_i = 0$.
L'endomorphisme $u - v$ étant nul sur une base de $\mathbb{R}^n$, il est, par définition, nul sur $\mathbb{R}^n$. Donc $u = v$.
On a montré : $\forall u, v \in S_n$, $(u \geq v$ et $v \geq u) \Longrightarrow u = v$. $\geq$ est donc antisymétrique.

Montrons enfin que $\geq$ est transitive.
Soient u, v et $w \in S_n$ tels que $u \geq v$ et $v \geq w$, c'est-à-dire tels que $u - v \in S_n^+$ et $v - w \in S_n^+$.
On veut montrer que $u \geq w$, autrement dit que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $((u-w)(x), x) \geq 0$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $((u-w)(x), x) = \big((u-v)(x) + (v-w)(x)\ ,\ x\big)$

Et oui, intercaler v pour pouvoir utiliser nos hypothèses...

D'où : $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ ((u-w)(x), x) = ((u-v)(x), x) + ((v-w), x)$
Or, $u - v \in S_n^+$ et $v - w \in S_n^+$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $((u-v)(x), x) \geq 0$ et $((v-w), x) \geq 0$.
On en conclut : $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ ((u-w)(x), x) \geq 0$. Et $u - w \in S_n$ (car S_n espace vectoriel).
Donc $u - w \in S_n^+$, et donc $u \geq w$.

On a montré : $\forall\ u, v, w \in S_n, \quad (u \geq v \text{ et } v \geq w) \Longrightarrow u \geq w$. $\geq$ est donc transitive.

$\boxed{\text{Finalement, } \geq \text{ est bien une relation d'ordre sur } S_n.}$

2) *Autrement dit, a-t-on, pour tous $u, v \in S_n$, $u \geq v$ ou $v \geq u$?*

Soit $(x_1, x_2, ..., x_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Soit u l'endomorphisme tel que $u(x_1) = x_1$ et, pour tout $i \in [\![2; n]\!]$, $u(x_i) = -x_i$.
u est un endomorphisme symétrique, car sa matrice dans la base canonique, qui est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$, est symétrique (car diagonale).
Soit $v = 0_{\mathcal{L}(E)}$ l'endomorphisme nul de $\mathbb{R}^n$.

$((u-v)(x_2), x_2) = (u(x_2), x_2) = (-x_2, x_2) = -||x_2||^2 = -1 < 0$ donc $u - v \notin S_n^+$.
Et $((v-u)(x_1), x_1) = (-u(x_1), x_1) = (-x_1, x_1) = -||x_1||^2 = -1 < 0$ donc $v - u \notin S_n^+$

v et u ne peuvent donc pas être comparés par cette relation $\geq$.

$\boxed{\geq \text{ n'est donc pas une relation d'ordre total.}}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com