Six affixes

Ayoub Hajlaoui

Polynôme à soucis ? On peut utiliser ces six affixes-ci pour le factoriser.

Énoncé : (temps conseillé : 1 heure) *d'après bac S Asie, juin 1998*

Le plan complexe $\boldsymbol{P}$ est rapporté à un repère direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - z\sqrt{3} + 1 = 0$. et exprimer ses solutions z_1 et z_2 sous forme exponentielle. (On appellera z_1 la solution à partie imaginaire positive)
   On appelle M_1 et M_2 les points d'affixes respectives z_1 et z_2.
2. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$. Calculer l'affixe z_3 du point $\mathrm{M}_3 = r(\mathrm{M}_2)$.
3. Soit t la translation dont le vecteur $\vec{w}$ a pour affixe $-\dfrac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{2}$. Calculer l'affixe z_4 du point $\mathrm{M}_4 = t(\mathrm{M}_2)$.
4. Soient $z_5 = \dfrac{\mathrm{i}}{2}(1 + \mathrm{i}\sqrt{3})$ et $z_6 = \dfrac{2}{\mathrm{i} - \sqrt{3}}$.
   Exprimer z_5 et z_6 sous forme algébrique et sous forme exponentielle.
5. (a) Calculer z_k^6 pour $k \in \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$.
   (b) Écrire $z^6 + 1$ sous forme d'un produit de trois polynômes du second degré à coefficients réels. Justifier cette écriture.

Correction :

1) On calcule le discriminant Δ. $\Delta = (-\sqrt{3})^2 - 4 = -1 < 0$.
L'équation $z^2 - z\sqrt{3} + 1 = 0$. admet donc deux solutions complexes conjuguées z_1 et z_2.
$z_1 = \dfrac{\sqrt{3} + i\sqrt{1}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + i \times \dfrac{1}{2}$ et $z_2 = \overline{z_1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - i \times \dfrac{1}{2}$
Attention, l'énoncé ne nous laisse pas le choix quant à qui est z_1 et qui est z_2.
$|z_1| = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (\frac{3}{2})^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$

Dans ce cas précis, le calcul du module n'était pas nécessaire, puisqu'on reconnaît tout de suite des valeurs remarquables de cos et sin...
$\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$ donc $z_1 = \cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$. Donc $\boxed{z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}}}$.
Et $z_2 = \overline{z_1}$ donc $\boxed{z_2 = e^{-i\frac{\pi}{6}}}$

2) z_2 est de module 1 donc M_2 est sur le cercle de centre O et de rayon 1.
En appliquant à M_2 la rotation r de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$, on obtient donc un point M_3 qui est encore sur ce cercle. Donc $|z_3| = 1$.
De plus, $\arg(z_3) = \arg(z_2) + \dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{4\pi}{6} = \dfrac{3\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2}$. $\boxed{\text{Donc } z_3 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com

3) M_4 est l'image de M_2 par la translation de vecteur $\vec{w}$. On sait donc que $\vec{M_2M_4} = \vec{w}$
En passant aux affixes : $z_{\vec{M_2M_4}} = z_{\vec{w}}$ *et l'affixe de $\vec{w}$ est donnée par l'énoncé...*

Donc $z_4 - z_2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - i \times \dfrac{1}{2}$

On obtient $z_4 = z_2 - \dfrac{\sqrt{3}}{2} - i \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - i \times \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} - i \times \dfrac{1}{2}$. Finalement, $\boxed{z_4 = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}}$

4) $z_5 = \dfrac{i}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\boxed{z_5 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i \times \dfrac{1}{2}}$

On cherche θ tel que $\cos(\theta) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{1}{2}$

On sait $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$. Donc $\cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(\pi - \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$.

D'où $z_5 = \cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$. Finalement, $\boxed{z_5 = e^{i\frac{5\pi}{6}}}$

$z_6 = \dfrac{2}{i - \sqrt{3}} = \dfrac{2(-i - \sqrt{3})}{(i - \sqrt{3})(-i - \sqrt{3})} = \dfrac{-2\sqrt{3} - 2i}{\sqrt{3}^2 + 1^2}$. Donc $z_6 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - i \times \dfrac{1}{2}$

On remarque $z_6 = \overline{z_5}$. Donc $\boxed{z_6 = e^{-i\frac{5\pi}{6}}}$

<u>Méthode 2</u> :
Si le z_6 donné n'était pas commode au départ, son inverse, lui...
$\dfrac{1}{z_6} = \dfrac{i - \sqrt{3}}{2} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i \times \dfrac{1}{2} = z_5$ Donc $z_6 = \dfrac{1}{e^{i\frac{5\pi}{6}}} = e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.
Puis on se sert du fait que $z_6 = \overline{z_5}$ pour avoir facilement la forme algébrique...

5)a) *L'énoncé nous demande tout simplement de calculer z_1^6, z_2^6, z_3^6,..,z_6^6*

On utilise les formes exponentielles (plus appropriées pour la puissance). *Sauf s'il y a plus simple à faire...*

$z_1^6 = (e^{i\frac{\pi}{6}})^6 = e^{i\frac{\pi}{6}\times 6} = e^{i\pi} = -1$ $\qquad$ $z_2^6 = (\overline{z_1})^6 = \overline{z_1^6} = \overline{-1} = -1$ car $-1 \in \mathbb{R}$
$z_3^6 = i^6 = (i^2)^3 = (-1)^3 = -1$ $\qquad$ $z_4^6 = (\overline{z_3})^6 = \overline{z_3^6} = \overline{-1} = -1$
$z_5^6 = (e^{i\frac{5\pi}{6}})^6 = e^{i\frac{5\pi}{6}\times 6} = e^{i5\pi} = e^{i\pi} = -1$ $\qquad$ $z_6^6 = (\overline{z_5})^6 = \overline{z_5^6} = \overline{-1} = -1$

5)b) Le polynôme P défini par $P(z) = z^6 + 1$ est un polynôme de degré 6.
D'après 5)a), $P(z_1) = P(z_2) = P(z_3) = P(z_4) = P(z_5) = P(z_6) = 0$.
Autrement dit, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 et z_6 sont des racines de P (distinctes).
Et P ne peut pas avoir plus de 6 racines (car il est de degré 6).
Donc les racines de P sont exactement z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 et z_6.
Le coefficient dominant de P est 1.
Donc : $\forall z \in \mathbb{C},\ P(z) = 1 \times (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)(z - z_5)(z - z_6)$
Rappelons de plus que $z_2 = \overline{z_1}$ et $z_6 = \overline{z_5}$
Donc : $\forall z \in \mathbb{C},\ P(z) = (z - z_1)(z - \overline{z_1})(z - i)(z + i)(z - z_5)(z - \overline{z_5})$
Il semble donc judicieux de développer les facteurs deux à deux :
D'où : $\forall z \in \mathbb{C},\ P(z) = (z^2 - z\overline{z_1} - zz_1 + z_1\overline{z_1})(z^2 - i^2)(z^2 - z\overline{z_5} - zz_5 + z_5\overline{z_5})$
Rappelons que pour tout $Z \in \mathbb{C}$, $Z\overline{Z} = |Z|^2$
On en déduit : $\forall z \in \mathbb{C},\ P(z) = \left(z^2 - z(\overline{z_1} + z_1) + |z_1|^2\right)(z^2 + 1)\left(z^2 - z(\overline{z_5} + z_5) + |z_5|^2\right)$
Rappelons que pour tout $Z \in \mathbb{C}$, $Z_1 + \overline{Z_1} = 2\mathrm{Re}(Z)$
Par suite : $\forall z \in \mathbb{C},\ P(z) = \left(z^2 - z \times 2 \times \mathrm{Re}(z_1) + 1\right)(z^2 + 1)\left(z^2 - z \times 2 \times \mathrm{Re}(z_5) + 1\right)$

Finalement : $\boxed{\text{pour tout } z \in \mathbb{C},\ z^6 + 1 = (z^2 - \sqrt{3}z + 1)(z^2 + 1)(z^2 + \sqrt{3}z + 1)}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com