# Suites d'intégrales

Ayoub Hajlaoui

*Les hirondelles chantent. Confinement solaire.*
*Suites bien différentes, principes similaires.*

**Énoncé :** (temps conseillé : 1 h 40 min)

1) On considère les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par :
$u_n = \int_0^1 t^n \sin^2(t)\ \mathrm{d}t$ et $v_n = \int_0^1 t^n \cos^2(t)\ \mathrm{d}t$
a) Calculer $u_0$ et $v_0$.
b) Montrer que les suites $u$ et $v$ sont convergentes.
c) Déterminer leurs limites.

2) On considère la suite $(w_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = \int_0^1 t^n e^t\ \mathrm{d}t$.
a) Calculer $w_0$.
b) Montrer que la suite $w$ est convergente.
c) Montrer que pour tout entier naturel $n$ : $w_{n+1} = e - (n+1)w_n$
d) Déterminer la limite de la suite $w$ de deux façons différentes.

**Correction :**

1)a) $u_0 = \int_0^1 t^0 \sin^2(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^1 \sin^2(t)\ \mathrm{d}t$ et $v_0 = \int_0^1 t^0 \cos^2(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^1 \cos^2(t)\ \mathrm{d}t$

*Prises séparément, ces intégrales semblent difficiles à calculer, mais si on les sommait...*

$u_0 + v_0 = \int_0^1 \sin^2(t)\ \mathrm{d}t + \int_0^1 \cos^2(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\sin^2(t) + \cos^2(t)\right)\ \mathrm{d}t$ par linéarité

Donc $u_0 + v_0 = \int_0^1 1\ \mathrm{d}t = \left[t\right]_0^1 = 1 - 0 = 1$

*Par cette somme, on a obtenu une équation entre nos deux inconnues $u_0$ et $v_0$. Il nous faut une autre équation. Si on connaît bien ses formules de trigo, on devrait avoir une idée...*

De plus, $v_0 - u_0 = \int_0^1 \cos^2(t)\ \mathrm{d}t - \int_0^1 \sin^2(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\cos^2(t) - \sin^2(t)\right)\ \mathrm{d}t$ par linéarité

Donc $u_0 - v_0 = \int_0^1 \cos(2t)\ \mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\sin(2) - \frac{1}{2}\sin(0) = \frac{1}{2}\sin(2)$

On a donc : $\begin{cases} u_0 + v_0 &= 1 \\ v_0 - u_0 &= \frac{1}{2}\sin(2) \end{cases}$ Donc $\begin{cases} 2v_0 &= 1 + \frac{1}{2}\sin(2) \quad \text{(ligne 1 + ligne 2 du syst. précédent)} \\ 2u_0 &= 1 - \frac{1}{2}\sin(2) \quad \text{(ligne 1 - ligne 2 du syst. précédent)} \end{cases}$.

Finalement, $\boxed{u_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sin(2)}$ et $\boxed{v_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sin(2)}$

1)b) *On ne cherchera évidemment pas à calculer de limite dans cette question, vu que c'est demandé en 1)c).*

*Que faire pour montrer que $(u_n)$ converge ? Il est assez simple de voir que $(u_n)$ est positive (donc minorée par 0...) Montrons-le pour ensuite nous en servir.*

Pour tout entier naturel $n$, pour tout $t \in [0\ ;\ 1]$, $t^n \geq 0$ et $\sin^2(t)$ donc $t^n \sin^2(t) \geq 0$

Donc par positivité de l'intégrale (sens croissant), $\displaystyle\int_0^1 t^n \sin^2(t)\, \mathrm{d}t \geq 0$.

Donc, pour tout entier naturel $n$, $u_n \geq 0$.

Donc la suite $(u_n)$ est minorée (par 0).

*Ce serait bien qu'elle soit aussi décroissante !*

Pour tout entier naturel $n$ : $u_{n+1} - u_n = \displaystyle\int_0^1 t^{n+1} \sin^2(t)\, \mathrm{d}t - \int_0^1 t^n \sin^2(t)\, \mathrm{d}t$.

Par linéarité, on a donc : $u_{n+1} - u_n = \displaystyle\int_0^1 \left(t^{n+1} \sin^2(t) - t^n \sin^2(t)\right) \mathrm{d}t = \int_0^1 t^n \sin^2(t)\left(t-1\right) \mathrm{d}t$.

Or, pour $t \in [0\ ;\ 1]$, $t^n \sin^2(t) \geq 0$ et $t - 1 \leq 0$ donc $t^n \sin^2(t)\left(t-1\right) \leq 0$

Donc $\displaystyle\int_0^1 t^n \sin^2(t)\left(t-1\right) \mathrm{d}t \leq 0$. Autrement dit, $u_{n+1} - u_n \leq 0$ (et ce pour tout $n \in \mathbb{N}$).

Donc $(u_n)$ est décroissante. On a vu qu'elle est de plus minorée (par 0).

On en conclut, d'après le théorème de convergence monotone, que $(u_n)$ converge.

On applique le même raisonnement à $(v_n)$ (en remplaçant $\sin$ par $\cos$).

En conclusion, $\boxed{\text{les suites } u \text{ et } v \text{ sont bien convergentes.}}$

1)c) *Comment calculer la limite de $(u_n)$ ? Savons-nous calculer explicitement $u_n$ pour tout entier naturel $n$ ? A priori, non. Alors peut-être ne s'agit-il pas de calculer les intégrales $u_n$, mais plutôt de les comparer à des intégrales qu'on sait calculer...*

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in [0\ ;\ 1]$, $0 \leq t^n \sin^2(t) \leq t^n$ car $\sin^2(t) \leq 1$

Par croissance de l'intégrale (bornes dans le sens croissant) : $0 \leq \displaystyle\int_0^1 t^n \sin^2(t)\, \mathrm{d}t \leq \int_0^1 t^n\, \mathrm{d}t$

*Et cette intégrale de droite, on sait la calculer !*

D'où : $0 \leq u_n \leq \left[\dfrac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$. Donc : $0 \leq u_n \leq \dfrac{1^{n+1}}{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$. *Attention, c'est $t$ et pas $n$ qu'on remplace dans les crochets !*

On a donc, pour tout entier naturel : $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.

Et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$. Donc d'après le théorème des gendarmes, $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$

On obtient de même (en remplaçant juste sin par cos dans la démonstration) : $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = 0}$

2)a) $w_0 = \displaystyle\int_0^1 t^0 e^t\, \mathrm{d}t = \int_0^1 e^t\, \mathrm{d}t = \left[e^t\right]_0^1 = e^1 - e^0$. Donc $\boxed{w_0 = e - 1}$

2)b) Pour tout entier naturel $n$, pour tout $t \in [0\ ;\ 1], t^n \geq 0$ et $e^t > 0$ donc $t^n e^t \geq 0$. Donc $\displaystyle\int_0^1 t^0 e^t\, \mathrm{d}t \geq 0$. Donc $w$ est minorée par 0.

Pour tout entier naturel $n$, $w_{n+1} - w_n = \displaystyle\int_0^1 t^{n+1} e^t\, \mathrm{d}t - \int_0^1 t^n e^t\, \mathrm{d}t = \int_0^1 (t^{n+1} - t^n) e^t\, \mathrm{d}t$ par linéarité.

Donc $w_{n+1} - w_n = \displaystyle\int_0^1 t^n (t-1) e^t\, \mathrm{d}t$. Pour tout $t \in [0\ ;\ 1]$, $t^n e^t \geq 0$ et $t - 1 \leq 0$ donc $t^n (t-1) e^t \leq 0$

Donc pour tout entier naturel $n$, $w_{n+1} - w_n \leq 0$. Autrement dit, $w$ est décroissante.

Le théorème de convergence monotone nous permet de conclure que $\boxed{w \text{ est convergente.}}$

2)c) *Comment attaquer la question ? $w_{n+1}$ et $w_n$ sont des intégrales. Peut-être exprimer $w_{n+1}+(n+1)w_n$ sous forme d'une seule intégrale, et montrer par le calcul que ça fait $e$ ?*

Pour tout entier naturel $n$, $w_{n+1}+(n+1)w_n = \int_0^1 t^{n+1}e^t \ \mathrm{d}t + (n+1)\int_0^1 t^n e^t \ \mathrm{d}t$
$= \int_0^1 t^{n+1}e^t \ \mathrm{d}t + \int_0^1 (n+1)t^n e^t \ \mathrm{d}t = \int_0^1 t^{n+1}e^t + (n+1)t^n e^t \ \ \mathrm{d}t$ par linéarité.

*Ne voit-on pas du $u'v+uv'$ sous l'intégrale ?* En posant, pour tout $t \in [0\ ;\ 1]$, $u(t)=t^{n+1}$ et $v(t)=e^t$, on a $u'(t)=(n+1)t^n$ et $v'(t)=e^t$. Donc $u(t)v'(t)+u'(t)v(t)=t^{n+1}e^t+(n+1)t^n e^t$

Donc $w_{n+1}+(n+1)w_n = \int_0^1 u(t)v'(t)+u'(t)v(t) \ \ \mathrm{d}t = \left[u(t)v(t)\right]_0^1 = \left[t^{n+1}e^t\right]_0^1 = 1^{n+1}e^1 - 0^{n+1}e^0$

*Attention, toujours, à ne pas tomber dans un piège : c'est bien $t$ qu'on remplace dans les crochets, et pas $n$ (puisque $t$ est notre variable d'intégration)*

Donc $w_{n+1}+(n+1)w_n = e$.

Donc, $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n : w_{n+1} = e-(n+1)w_n}$

2)d) <u>Méthode 1</u> : *qui s'inspire de la 1)c)*

*Essayons d'encadrer l'intégrale $w_n$ par des intégrales que nous savons calculer. On a bien envie de garder le $t^n$ parce que c'est lui qui nous permettra, après intégration d'obtenir un terme qui tend vers 0..*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in [0\ ;\ 1]$ : $0 < e^t \leq e^1$ par stricte croissance de exp sur $\mathbb{R}$. Donc (comme $t^n \geq 0$) $0 \leq t^n e^t \leq t^n \times e$. Donc $0 \leq w_n \leq \int_0^1 t^n e \ \ \mathrm{d}t$

*Et on sait bien calculer l'intégrale de droite ! Pour ceux à qui le $e$ fait peur : c'est juste une constante multiplicative, ne l'amalgamez pas avec la fonction exponentielle !*

$\int_0^1 t^n e \ \ \mathrm{d}t = \left[e \times \frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = e \times \frac{1^{n+1}}{n+1} = \frac{e}{n+1}$.

Il s'ensuit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $0 \leq w_n \leq \frac{e}{n+1}$. Et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e}{n+1} = 0$

Le théorème des gendarmes nous permet de conclure : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0}$

*Oui oui, les dingueries du genre « croissance comparée »sont à bannir. C'est juste $e$ au numérateur, pas $e^n$ !!*

<u>Méthode 2</u> : *en utilisant la relation de récurrence obtenue en 2)c)*

D'après 2)b), la suite $w$ est convergente. Notons $l$ sa limite.
Et d'après 2)c) : pour tout entier naturel $n$, $w_{n+1} = e-(n+1)w_n$

*Hors de question de faire tout de suite tendre $n$ vers $+\infty$ dans cette égalité, le membre de droite nous poserait problème. (Il faudrait distinguer des cas sur $l$ pour savoir vers quoi le produit $(n+1)w_n$ tendrait. Et si on peut l'éviter...)*

Autrement dit, pour tout entier naturel $n$, $(n+1)w_n = e-w_{n+1}$, ou encore : $w_n = \frac{e-w_{n+1}}{n+1}$
D'une part : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$.
Et d'autre part : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e-w_{n+1}}{n+1} = 0$ par quotient de limites (le numérateur tendant vers $e-l$ et le dénominateur vers $+\infty$)
On en déduit, par unicité de la limite, que $l=0$. En conclusion, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com