Théorème ergodique de Von Neumann

Ayoub Hajlaoui

Comme Hilbert en prépa n'est plus si familier,
voyons de Von Neumann un cas particulier.

Énoncé : (temps conseillé : 35 min)

Soit $\boldsymbol{E}$ un espace euclidien, dont le produit scalaire sera noté $< \, , \, >$ et la norme associée $||.||$. On notera $\boldsymbol{Id}$ l'application identité de $\boldsymbol{E}$.
Pour tout $\boldsymbol{F}$ sous-espace vectoriel de $\boldsymbol{E}$, on note $\boldsymbol{F}^{\perp}$ l'orthogonal de $\boldsymbol{F}$.
Soit $\boldsymbol{T}$ un endomorphisme de $\boldsymbol{E}$ vérifiant : $\forall x \in \boldsymbol{E},\ ||\boldsymbol{T}(x)|| \leq ||x||$.
Soit $\boldsymbol{p}$ le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Ker}(\boldsymbol{T} - \boldsymbol{Id})$.
Enfin, pour tout entier naturel $\boldsymbol{n} \geq 1$, on pose : $\boldsymbol{T}_n = \dfrac{1}{\boldsymbol{n}+1} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{T}^k$

1) Montrer que $\mathrm{Ker}(\boldsymbol{T} - \boldsymbol{Id}) = \left(\mathrm{Im}(\boldsymbol{T} - \boldsymbol{Id})\right)^{\perp}$
2) Montrer que pour tout $x \in \boldsymbol{E}$: $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n(x) = p(x)$ (c-à-d : $\lim\limits_{n \to +\infty} ||T_n(x) - p(x)|| = 0$)

Correction :

1) *Comment montrer l'égalité entre ces deux sous-espaces vectoriels de E ? On serait tentés de procéder par double inclusion. En réalité, une seule suffirait ! Pensez dimensions…*

$\boldsymbol{E}$ est un espace euclidien, c'est-à-dire un espace vectoriel réel normé de dimension finie. $\boldsymbol{T} - \boldsymbol{Id}$ est un endomorphisme de $\boldsymbol{E}$. D'après le théorème du rang :
$\dim \mathrm{Ker}(\boldsymbol{T} - \boldsymbol{Id}) + \dim \mathrm{Im}(\boldsymbol{T} - \boldsymbol{Id}) = \dim \boldsymbol{E}$. Donc $\dim \mathrm{Ker}(\boldsymbol{T} - \boldsymbol{Id}) = \dim \boldsymbol{E} - \dim \mathrm{Im}(\boldsymbol{T} - \boldsymbol{Id})$

Par ailleurs, $\mathrm{Im}(\boldsymbol{T} - \boldsymbol{Id})$ et $\left(\mathrm{Im}(\boldsymbol{T} - \boldsymbol{Id})\right)^{\perp}$ sont supplémentaires dans $\boldsymbol{E}$.
Donc $\dim \left(\mathrm{Im}(\boldsymbol{T} - \boldsymbol{Id})\right)^{\perp} + \dim \mathrm{Im}(\boldsymbol{T} - \boldsymbol{Id}) = \dim \boldsymbol{E}$.
Autrement dit : $\dim \left(\mathrm{Im}(\boldsymbol{T} - \boldsymbol{Id})\right)^{\perp} = \dim \boldsymbol{E} - \dim \mathrm{Im}(\boldsymbol{T} - \boldsymbol{Id})$

On a donc montré : $\underline{\dim \mathrm{Ker}(\boldsymbol{T} - \boldsymbol{Id}) = \dim \left(\mathrm{Im}(\boldsymbol{T} - \boldsymbol{Id})\right)^{\perp}}$

Il suffira donc de montrer une seule inclusion. Laquelle ? $\left(Im(\boldsymbol{T} - \boldsymbol{Id})\right)^{\perp} \subset Ker(\boldsymbol{T} - \boldsymbol{Id})$ me semble plus simple à montrer. En effet, le fait de supposer qu'un élément z de $\boldsymbol{E}$ est dans $\left(Im(\boldsymbol{T} - \boldsymbol{Id})\right)^{\perp}$ donne une information riche (voir ci-dessous), alors que le fait de supposer qu'un élément z de $\boldsymbol{E}$ est dans $Ker(\boldsymbol{T} - \boldsymbol{Id})$ donne « seulement » $\boldsymbol{T}(z) = z$

Soit $z \in \left(\mathrm{Im}(\boldsymbol{T} - \boldsymbol{Id})\right)^{\perp}$. Par définition, on a : $\forall y \in \mathrm{Im}(\boldsymbol{T} - \boldsymbol{Id}),\ < z \, , y > = 0$.
Autrement dit : $\forall x \in \boldsymbol{E},\ < z \, , (\boldsymbol{T} - \boldsymbol{Id})(x) > = 0$. C'est-à-dire : $\forall x \in \boldsymbol{E},\ < z \, , \boldsymbol{T}(x) - x > = 0$
Par linéarité à droite du produit scalaire : $\forall x \in \boldsymbol{E},\ < z \, , \boldsymbol{T}(x) > - < z \, , x > = 0$
Donc, pour tout élément x de $\boldsymbol{E}$, $< z \, , \boldsymbol{T}(x) > = < z \, , x >$ *Et alors, qu'en faire ?*

Peut-être que pour un x bien choisi, ça nous permettrait d'utiliser une hypothèse de l'énoncé…

En particulier : $< z \, , \boldsymbol{T}(z) > = < z \, , z >$. Autrement dit : $< z \, , \boldsymbol{T}(z) > = ||z||^2$ (*)

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $< z\ , T(z) > \ \leq ||z||\ ||T(z)||$
Et, par hypothèse de l'énoncé sur T : $||T(z)|| \leq ||z||$ donc $||z||\ ||T(z)|| \leq ||z||^2$.

D'où : $||z||^2 \leq\ ||z||\ ||T(z)|| \leq\ ||z||^2$. On en déduit : $||z||\ ||T(z)|| =\ ||z||^2$ (**)

• Si $z = 0$, $z \in \mathrm{Ker}(T - Id)$ (trivial, $\mathrm{Ker}(T - Id)$ étant un sous-espace vectoriel de E)

• Si $z \neq 0$, (**) donne : $||T(z)|| = ||z||$
Et on aimerait arriver à : $z \in \mathrm{Ker}(T - Id)$, c'est-à-dire $T(z) = z$.
Mais égalité de normes de vecteurs n'implique pas égalité des vecteurs. Quelque chose nous aurait-il donc échappé ?
Nous avons en fait montré précédemment ((*) et (**)) : $< z\ , T(z) > \ = ||z||\ ||T(z)||$.
Nous nous trouvons donc devant un cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, et pouvons en déduire que z et $T(z)$ sont colinéaires.
z étant non nul, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $T(z) = \lambda z$.
Mais alors, $< z\ , T(z) > = < z\ , \lambda z >= \lambda ||z||^2$. Donc, en vertu de (*) : $\lambda ||z||^2 = ||z||^2$.
Et comme $||z||^2 \neq 0$, on en déduit $\lambda = 1$.
Donc $T(z) = z$, et $z \in \mathrm{Ker}(T - Id)$

On a donc montré : $\forall z \in \left(\mathrm{Im}(T - Id)\right)^{\perp},\ z \in \mathrm{Ker}(T - Id)$.
D'où : $\left(\mathrm{Im}(T - Id)\right)^{\perp} \subset \mathrm{Ker}(T - Id)$.

De cette inclusion et de l'égalité des dimensions, nous pouvons conclure :
$\boxed{\mathrm{Ker}(T - Id) = \left(\mathrm{Im}(T - Id)\right)^{\perp}}$

2) $\mathrm{Im}(T - Id)$ et $\left(\mathrm{Im}(T - Id)\right)^{\perp}$ sont supplémentaires dans E, et on vient de montrer : $\mathrm{Ker}(T - Id) = \left(\mathrm{Im}(T - Id)\right)^{\perp}$. Donc $\mathrm{Ker}(T - Id) \bigoplus \mathrm{Im}(T - Id) = E$

Oui mais quel intérêt ? Une décomposition avantageuse pour nous...

Soit $x \in E$. Il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in \mathrm{Ker}(T - Id) \times \mathrm{Im}(T - Id)$ tel que $x = x_1 + x_2$
p est le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Ker}(T - Id)$, et $\mathrm{Im}(T - Id) = \left(\mathrm{Ker}(T - Id)\right)^{\perp}$.
On a donc : $p(x) = x_1$.
Et, pour tout entier $n \geq 1$: $T_n(x) = \dfrac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} T^k(x) = \dfrac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} T^k(x_1 + x_2)$
$= \dfrac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} T^k(x_1) + \dfrac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} T^k(x_2)$ par linéarité.
Or, $x_1 \in \mathrm{Ker}(T - Id)$ donc $T(x_1) = x_1$ et par récurrence (vraiment...) immédiate, pour tout entier $k \geq 1$, $T^k(x_1) = x_1$. Donc $\dfrac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} T^k(x_1) = \dfrac{n}{n+1} x_1$.
Et $x_2 \in \mathrm{Im}(T - Id)$, donc il existe $x_3 \in E$ tel que $x_2 = T(x_3) - x_3$.
D'où : $\dfrac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} T^k(x_2) = \dfrac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} T^k\left(T(x_3) - x_3\right) = \dfrac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} T^{k+1}(x_3) - T^k(x_3)$ par linéarité
$= \dfrac{1}{n+1}\left(T^{n+1}(x_3) - T(x_3)\right)$ par télescopage
Donc $T_n(x) = \dfrac{n}{n+1} x_1 + \dfrac{1}{n+1}\left(T^{n+1}(x_3) - T(x_3)\right)$
Et : $p(x) - T_n(x) = x_1 - \dfrac{n}{n+1} x - \dfrac{1}{n+1}\left(T^{n+1}(x_3) - T(x_3)\right) = \dfrac{1}{n+1} x_1 - \dfrac{1}{n+1}\left(T^{n+1}(x_3) - T(x_3)\right)$

Donc $||p(x) - T_n(x)|| = ||\frac{1}{n+1}x_1 - \frac{1}{n+1}\left(T^{n+1}(x_3) - T(x_3)\right)||$

Par l'inégalité triangulaire et l'homogénéité de la norme :

$$||p(x) - T_n(x)|| \leq \frac{1}{n+1}||x_1|| + \frac{1}{n+1}||T^{n+1}(x_3) - T(x_3)||$$

Nous y sommes presque, mais attention ! x_1 est un vecteur ne dépendant pas de n, donc on pourra rapidement conclure quant à la limite du terme de gauche de la somme. Par contre, $T^{n+1}(x_3)$ dépend de n...

En réappliquant l'inégalité triangulaire, on obtient :

$$||p(x) - T_n(x)|| \leq \frac{1}{n+1}||x_1|| + \frac{1}{n+1}||T^{n+1}(x_3)|| + \frac{1}{n+1}||T(x_3)||$$

On sait de plus que $||T(x_3)|| \leq ||x_3||$, et donc (encore) par récurrence (vraiment) immédiate : $||T^{n+1}(x_3)|| \leq ||x_3||$

D'où, pour tout $n \geq 1$: $0 \leq ||p(x) - T_n(x)|| \leq \frac{1}{n+1}\left(||x_1|| + 2||x_3||\right)$

Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1}\left(||x_1|| + 2||x_3||\right) = 0$.

Donc d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n \to +\infty} ||p(x) - T_n(x)|| = 0$.

On a bien montré : $\boxed{\text{pour tout } x \in E : \lim\limits_{n \to +\infty} T_n(x) = p(x)}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com