Lemme de Schur

Ayoub Hajlaoui

Le loup lui dit « si ce n'est toi, c'est donc ton frère »
Ce qui se dit aussi : « c'est toi ou c'est ton frère »

Énoncé : (temps conseillé : 40 min)

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimensions finies. On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F et $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E. On note Id_E l'application identité sur E.

On rappelle que, pour $u \in \mathcal{L}(E)$, un sous-espace vectoriel A de E est dit stable par u si $u(A) \subset A$ (autrement dit, si, pour tout $x \in A, u(x) \in A$).

On dit qu'une partie U de $\mathcal{L}(E)$ est irréductible lorsque les seuls sous-espaces vectoriels de E stables par tous les éléments u de U sont E lui-même et $\{0_E\}$.

1) Soit U une partie irréductible de $\mathcal{L}(E)$. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ vérifiant : $\forall u \in U, \exists\ v \in \mathcal{L}(F),\ f \circ u = v \circ f$. Montrer que f est nulle ou injective.

2) Soit V une partie irréductible de $\mathcal{L}(F)$. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ vérifiant : $\forall v \in V, \exists\ u \in \mathcal{L}(E),\ f \circ u = v \circ f$. Montrer que f est nulle ou surjective.

3) Soit U une partie irréductible de $\mathcal{L}(E)$ et soit f un endomorphisme non nul de E commutant avec tous les éléments de U. Montrer que f est un automorphisme de E.

4) Soit U une partie irréductible de $\mathcal{L}(E)$ et soit f un endomorphisme de E commutant avec tous les éléments de U. On suppose que f admet une valeur propre réelle λ. Montrer que $f = \lambda \mathrm{Id}_E$ *On pourra s'intéresser à l'endomorphisme* $f - \lambda Id_E$

Correction :

1) *N'oublions pas que montrer « A ou B » revient à montrer : « si non A, alors B », ou encore « (non A) $\Rightarrow$ B ». Lire les deux vers médiocres (d'habitude, je fais mieux !) en prélude.*
Supposons que f est non nulle, et montrons qu'elle est injective.
On aurait aussi pu la supposer non injective, et montrer qu'elle est nulle, mais « non injective » me semble moins simple à exploiter dans le contexte.
Pour montrer que l'application linéaire f est injective, montrons que $\mathrm{Ker} f = \{0_E\}$. Ça semble en effet la caractérisation d'injectivité la plus pertinente à utiliser vu la définition de partie irréductible donnée par l'énoncé
Mais... Attendez voir. U étant irréductible, les seuls sous-espaces vectoriels de E stables par tous les éléments u de U sont E lui-même et $\{0_E\}$. Peut-être s'agit-il tout simplement de montrer que $\mathrm{Ker} f$ est stable par tous les éléments u de U.. Ce qui donnerait $\mathrm{Ker} f = E$ ou $\mathrm{Ker} f = \{0_E\}$. Ce qui correspond (respectivement) à « f nulle » ou « f injective ». Exactement ce qu'on veut ! Mais alors dans ce cas, pas la peine de reformuler « A ou B » en « si non A, alors B » comme nous voulions le faire ! (Et comme on le fait souvent). Montrons donc, de manière directe, que « A ou B » est vrai. Et laissons le loup, l'agneau et son frère imaginaire à leur fable...

$\mathrm{Ker} f$ est un sous-espace vectoriel de E. Par hypothèse, pour tout $u \in U$, il existe $v \in \mathcal{L}(F)$ tel que $f \circ u = v \circ f$
Il s'ensuit alors, pour tout $x \in \mathrm{Ker} f$: $f\big(u(x)\big) = v\big(f(x)\big) = v(0_F)$ (car $x \in \mathrm{Ker} f$).
Et v est un endomorphisme de F. On a donc montré : $\forall u \in U,\ \forall x \in \mathrm{Ker} f,\ f\big(u(x)\big) = 0_F$.
Autrement dit, on a montré : $\forall u \in U,\ \forall x \in \mathrm{Ker} f,\ u(x) \in \mathrm{Ker} f$.

$\mathrm{Ker} f$ est donc un sous-espace vectoriel de E stable par tous les éléments de U.
Or, U est irréductible. Les seuls sous-espaces vectoriels de E stables par tous les éléments de U sont donc E lui-même et $\{0_E\}$.
On en déduit : $\mathrm{Ker} f = E$ (auquel cas f est nulle) ou $\mathrm{Ker} f = \{0_E\}$ (auquel cas f est injective).

En conclusion, si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ vérifie : « $\forall u \in U, \exists\, v \in \mathcal{L}(F),\ f \circ u = v \circ f$ », alors f est nulle ou injective.

2) *Si on a eu l'idée pour la 1), la démonstration est assez similaire…*

$\mathrm{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de F. Par hypothèse, pour tout $v \in V$, il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ u = v \circ f$
Soit $y \in \mathrm{Im} f$. Il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.

Appliquer la relation $f \circ u = v \circ f$ à x ou à y ? Telle est la question. On n'a pas vraiment le choix, en fait. $u \in \mathcal{L}(E)$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. On ne peut donc pas appliquer cette relation à y (élément de F).
$f\big(u(x)\big) = v\big(f(x)\big) = v(y)$. Autrement dit, $v(y) = f\big(u(x)\big) \in \mathrm{Im} f$.
On a montré : $\forall v \in U,\ \forall x \in \mathrm{Im} f,\ v(x) \in \mathrm{Im} f$
$\mathrm{Im} f$ est donc un sous-espace vectoriel de F stable par tous les éléments de V.
Or, V est une irréductible (mais cette fois-ci de F, non de E). Les seuls sous-espaces vectoriels de F stables par tous les éléments de V sont donc F lui-même et $\{0_F\}$.
On en déduit : $\mathrm{Im} f = \{0_F\}$ (auquel cas f est nulle) ou $\mathrm{Im} f = F$ (auquel cas f est surjective).

En conclusion, si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ vérifie : « $\forall v \in V, \exists\, u \in \mathcal{L}(E),\ f \circ u = v \circ f$ », alors f est nulle ou surjective.

3) *Ce genre de question où l'on peut retomber sur nos pattes même si on a eu du mal avec les précédentes…*
Dans les questions 2 et 3, f était un élément de $\mathcal{L}(E, F)$. Dans cette question, f est un élément de $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$…

f est un endomorphisme non nul de E vérifiant : $\forall u \in U,\ f \circ u = u \circ f$.

Donc $f \in \mathcal{L}(E, E)$ et vérifie (en prenant par exemple $v = u$) : $\forall u \in U,\ \exists v \in \mathcal{L}(E),\ f \circ u = v \circ f$
D'après 1) (appliquée dans le cas particulier où $F = E$), f est nul ou surjectif. f n'étant pas nul par hypothèse, on en déduit que f est injectif.

D'autre part, $f \in \mathcal{L}(E, E)$ et vérifie (en prenant par ex. $u = v$) : $\forall v \in U,\ \exists u \in \mathcal{L}(E),\ f \circ u = v \circ f$
D'après 2) (appliquée dans le cas particulier où $F = E$), f est nul ou surjectif. f n'étant pas nul par hypothèse, on en déduit que f est surjectif.

f est donc un endomorphisme bijectif de E. Autrement dit, f est un automorphisme de E.

4) Pour tout $u \in U$, $f \circ u = u \circ f$. Mais alors : $(f - \lambda \mathrm{Id}_E) \circ u = f \circ u - \lambda u = u \circ f - \lambda u$
$= u \circ (f - \lambda \mathrm{Id}_E)$.

Donc $f - \lambda \mathrm{Id}_E$ commute avec tout élément de U.
En vertu de 3), si $f - \lambda \mathrm{Id}_E$ est non nul, c'est un automorphisme de E. Mais c'est impossible !
En effet, λ étant valeur propre de f, $f - \lambda \mathrm{Id}_E$ n'est pas injectif (et donc pas bijectif, et donc pas un automorphisme).
On en déduit que $f - \lambda \mathrm{Id}_E$ est l'endomorphisme nul. En conclusion : $f = \lambda \mathrm{Id}_E$