Inégalité et produit

Ayoub Hajlaoui

Dans ce produit commode, nos voies nous nous frayons :
Le résultat se brode en trois coups de crayon.

Énoncé : (temps conseillé : 25 min)

Soit $\alpha \in [0\ ;\ 1]$.
1) Montrer que pour tout réel $x \geq 0$, $(1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x$
2) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (1 + \frac{\alpha}{k}) \geq (n+1)^\alpha$

Correction :

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = 1 + \alpha x - (1+x)^\alpha$
f est dérivable par composée et somme de fonctions dérivables et on a, pour tout x positif :
$f'(x) = \alpha - \alpha(1+x)^{\alpha-1} = \alpha\big(1 - (1+x)^{\alpha-1}\big)$ avec $\alpha \geq 0$
$\alpha \leq 1$ donc $\alpha - 1 \leq 0$. On en conclut que la fonction $t \mapsto t^{\alpha-1}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
Or, $1 + x \geq 1$. Donc $(1+x)^{\alpha-1} \leq 1^{\alpha-1} = 1$. D'où : $\forall x \geq 0\ ,\ f'(x) \geq 0$.
La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}_+$. De plus, on remarque $f(0) = 0$.
La fonction f est donc positive sur $\mathbb{R}_+$. Autrement dit, $\boxed{\text{pour tout réel } x \geq 0,\ (1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x}$

2) *Regardons tranquillement chaque terme* $1 + \dfrac{\alpha}{k}$ *de ce produit...*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout entier k compris entre 1 et n : $1 + \dfrac{\alpha}{k} = 1 + \alpha \times \dfrac{1}{k}$, avec $\dfrac{1}{k} \geq 0$.

Oui, je sais, $\dfrac{1}{k}$ *est même strictement positif, mais il suffit de dire* ≥ 0 *pour appliquer le résultat de la* 1*.*

On a donc, d'après 1), l'inégalité suivante pour tout k entre 1 et n : $1 + \dfrac{\alpha}{k} \geq (1 + \dfrac{1}{k})^\alpha$.

$1 + \dfrac{\alpha}{k}$ et $(1 + \dfrac{1}{k})^\alpha$ étant positifs pour tout k entre 1 et n, on peut effectuer le produit de ces inégalités. On obtient alors : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (1 + \frac{\alpha}{k}) \geq \prod_{k=1}^{n} (1 + \frac{1}{k})^\alpha = \prod_{k=1}^{n} (\frac{k+1}{k})^\alpha = \prod_{k=1}^{n} \frac{(k+1)^\alpha}{k^\alpha}$

Autrement dit : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (1 + \frac{\alpha}{k}) \geq \frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (k+1)^\alpha}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k^\alpha} = \frac{\displaystyle\prod_{k=2}^{n+1} k^\alpha}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k^\alpha}$ (changement d'indice au numérateur)

Si $n \geq 2$: $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (1 + \frac{\alpha}{k}) \geq \frac{(n+1)^\alpha \displaystyle\prod_{k=2}^{n} k^\alpha}{1^\alpha \displaystyle\prod_{k=2}^{n} k^\alpha} = (n+1)^\alpha$. D'où $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (1 + \frac{\alpha}{k}) \geq (n+1)^\alpha$

Si $n = 1$, $\displaystyle\prod_{k=1}^{1} (1 + \frac{\alpha}{k}) = 1 + \alpha = 1 + \alpha \times 1 \geq (1+1)^\alpha$ d'après 1). L'inégalité reste vraie pour $n = 1$.

On a bien montré : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \prod_{k=1}^{n} (1+\frac{\alpha}{k}) \geq (n+1)^{\alpha}}$

Remarque : on aurait pu conclure plus rapidement en utilisant un argument de télescopage :

De même qu'on aurait eu $\sum_{k=1}^{n} (k+1)^{\alpha} - k^{\alpha} = (n+1)^{\alpha} - 1^{\alpha}$, *on a :* $\prod_{k=1}^{n} \frac{(k+1)^{\alpha}}{k^{\alpha}} = \frac{(n+1)^{\alpha}}{1^{\alpha}}$

N'étant pas sûr, en fonction de votre filière, que vous avez le droit d'appliquer directement ce résultat de télescopage de produit sans le démontrer, j'ai préféré faire une correction plus détaillée.

Par ailleurs, remarquez qu'on peut facilement retrouver le télescopage du produit en passant par celui de la somme, dans le cas où tous les termes sont strictement positifs :

Si, $\forall k \in [|1\ ;\ n|]\ , u_k > 0 : \prod_{k=1}^{n} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \exp\left(\ln(\prod_{k=1}^{n} \frac{u_{k+1}}{u_k})\right) = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \ln(\frac{u_{k+1}}{u_k})\right)$

$= \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)\right) = \exp\left(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_1)\right)$ (par télescopage dans la somme)

$= \exp\left(\ln(\frac{u_{n+1}}{u_1})\right) = \frac{u_{n+1}}{u_1}$