Equation du quatrième degré intéressante

Ayoub Hajlaoui

La mention du degré peut jouer sur nos peurs,
Mais l'équation donnée peut cacher bien des sœurs !

Énoncé : (temps conseillé : 25 min)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $(x-1)(x-2)(x+3)(x+4) = 14$.

Correction :

Quel bon réflexe faut-il avoir face à ce genre d'équation du quatrième degré ? Chercher des " racines évidentes " du polynôme associé, à savoir ici $(X-1)(X-2)(X+3)(X+4)-14$. *Mais on a beau chercher, on n'en trouve pas. Quelles autres options nous reste-t-il ?*

Pas grand-chose, en fait. Développer ? Ça paraît bien peu ragoûtant. En tous cas, si par développer , on entend : développer jusqu'au bout. Mais justement, personne ne nous y oblige... Comment pourrait-on développer intelligemment ?

Pour tout réel x, $(x-1)(x-2)(x+3)(x+4) = (x^2-3x+2)(x^2+7x+12)$

Bof bof bof. Ce qu'on obtient en développant deux à deux, les deux premiers facteurs ensemble et les deux derniers ensemble, ne donne rien de bien intéressant. Eh bien, essayons autrement !

Pour tout réel x, $(x-1)(x+3)\times(x-2)(x+4) = (x^2+2x-3)(x^2+2x-8)$

Voilà qui est autrement plus intéressant, non ?... Non ?

L'équation à résoudre est donc équivalente à : $(x^2+2x-3)(x^2+2x-8) = 14$

En posant $X = x^2+2x$, l'équation devient : $(X-3)(X-8)-14 = 0$
Autrement dit : $X^2-11X+10 = 0$. *Une sympathique équation du second degré, quoi.*
Le discriminant associé est $\Delta = (-11)^2 - 4\times1\times10 = 81 > 0$
L'équation $X^2-11X+10=0$ a donc deux solutions distinctes $X_1 = \dfrac{11-9}{2} = 1$ et $X_2 = 10$
On en conclut : $(x^2+2x-3)(x^2+2x-8) = 14 \iff \left(x^2+2x = 1 \text{ ou } x^2+2x = 10\right)$
$\iff \left(x^2+2x-1 = 0 \text{ ou } x^2+2x-10 = 0\right)$

On résout ces deux dernières équations du second degré de manière classique *(delta, tout ça, tout ça...).*

La première a pour solutions $x_1 = \dfrac{-2-\sqrt{8}}{2} = \dfrac{-2-2\sqrt{2}}{2} = -1-\sqrt{2}$ et $x_2 = -1+\sqrt{2}$

La seconde a pour solutions $x_3 = \dfrac{-2-\sqrt{44}}{2} = \dfrac{-2-2\sqrt{11}}{2} = -1-\sqrt{11}$ et $x_4 = -1+\sqrt{11}$

$\boxed{\text{L'équation donnée par l'énoncé a donc pour solutions } -1-\sqrt{11}, -1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}, \text{ et } -1+\sqrt{11}}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com