Polynômes, trigonométrie, et somme d'une série de Riemann

Ayoub Hajlaoui

Exercice inspiré d'une exquise œuvre d'art :
la preuve repérée par un Grec sur le tard.

Énoncé : (temps conseillé : 50 min)

On rappelle que cot (cotangente) est définie sur $\mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$ par $\cot(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ (avec $a_n \neq 0$).
Soient $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n$ les racines de P (pas forcément distinctes, répétées selon leur multiplicité).
Justifier que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$

2) Montrer que pour tout $\theta \in \left]0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\cot^2(\theta) \leq \dfrac{1}{\theta^2} \leq \cot^2(\theta) + 1$

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note P_n le polynôme : $P_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{2n+1}{2k} X^k$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $\theta \in \left]0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$, $e^{in\theta} = \sin^n(\theta) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k \cot^{n-k}(\theta)$

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall \theta \in \left]0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\sin\big((2n+1)\theta\big) = \sin^{2n+1}(\theta) \times P_n\big(\cot^2(\theta)\big)$

4) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble des racines de P_n est :
$\left\{ \cot^2\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right),\ k \in [\![1\ ;\ n]\!] \right\}$

5) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{k=1}^{n} \cot^2\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right) = \dfrac{n(2n-1)}{3}$

6) Montrer que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

Correction :

1) *Rappelons que tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré supérieur ou égal à 1 est scindé sur $\mathbb{C}$. Autrement dit, tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré supérieur ou égal à 1 peut s'écrire comme produit de polynômes de degré 1 à coefficients complexes. (Pour l'anecdote, on dit que $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, contrairement à $\mathbb{R}$. Prenez X^2+1, polynôme à coefficients réels de degré supérieur à 1, mais que l'on ne peut pas écrire comme produit de polynômes de degré 1 à coefficients réels.)*

$P = a_n \prod_{k=1}^{n} (X - \lambda_k)$ *(ne surtout pas oublier le coefficient dominant a_n devant la factorisation)*

Autrement dit, $P = a_n(X-\lambda_1) \times (X-\lambda_2) \times ... \times (X-\lambda_n)$ Cela correspond à a_n multiplié par un produit de n facteurs de degré 1.

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com

En développant ce produit, les termes qui font apparaître du X^{n-1} sont tous ceux qui correspondent à un choix de X dans $n-1$ des parenthèses, et au choix du terme constant, un certain $-\lambda_k$, dans la parenthèse restante.
L'écriture de $a_n(X-\lambda_1)\times(X-\lambda_2)\times\ldots\times(X-\lambda_n)$ sous forme développée fait donc apparaître les termes suivants en X^{n-1} : $-\lambda_1 a_n X^{n-1} - \lambda_2 a_n X^{n-1} - \ldots - \lambda_n a_n X^{n-1} = -(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)a_n X^{n-1}$, et le coefficient devant X^{n-1} est $-a_n \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$. *Attendez, le coeff devant X^{n-1}, c'est, tout simplement...*

Le coefficient devant X^{n-1} est aussi a_{n-1}. Donc $a_{n-1} = -a_n \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$. a_n étant non nul, on en déduit :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n}}$$

2) *Comment parvenir à établir ces inégalités si ce n'est par des études de fonction ? Mais rien ne nous impose d'étudier, d'emblée, des fonctions horribles telles que $\theta \mapsto \frac{1}{\theta^2} - \cot^2(\theta)$ et $\theta \mapsto \cot^2(\theta) + 1 - \frac{1}{\theta^2}$. Regardons plus précisément ce $\cot^2(\theta)$ et ce $\cot^2(\theta)+1$...*

Pour tout $\theta \in \left]0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$, $\cot^2(\theta) + 1 = \dfrac{\cos^2(\theta)}{\sin^2(\theta)} + 1 = \dfrac{\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)}{\sin^2(\theta)} = \dfrac{1}{\sin^2(\theta)}$
Et $\cot^2(\theta) = \dfrac{1}{\tan^2(\theta)}$
Nous devons donc en fait montrer que pour tout $\theta \in \left]0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$, $\dfrac{1}{\tan^2(\theta)} \leq \dfrac{1}{\theta^2} \leq \dfrac{1}{\sin^2(\theta)}$
Peut-être s'agit-il donc de montrer des inégalités bien plus simples, et ensuite d'appliquer des fonctions monotones à leurs membres...

Montrons que pour tout $\theta \in \left]0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$, $\sin(\theta) \leq \theta \leq \tan(\theta)$ *(encadrement relativement classique qu'il faut savoir rapidement démontrer)*
Soient f et g les fonctions respectivement définies sur $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \theta - \sin(\theta)$ et $g(x) = \tan(\theta) - \theta$. f et g sont dérivables sur $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$ par somme de telles fonctions.
Pour tout $\theta \in \left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$, $f'(\theta) = 1 - \cos(\theta) \geq 0$. Et $g'(\theta) = \tan^2(\theta) + 1 - 1 = \tan^2(\theta) \geq 0$
f et g sont donc croissantes sur $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$. De plus, $f(0) = g(0) = 0$.
Nous pouvons donc en conclure que pour tout $\theta \in \left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$, $f(\theta) \geq 0$ et $g(\theta) \geq 0$
Autrement dit, pour tout $\theta \in \left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$, $\theta \geq \sin(\theta)$ et $\tan(\theta) \geq \theta$, c'est-à-dire : $\sin(\theta) \leq \theta \leq \tan(\theta)$
Or, sur cet intervalle, la fonction sinus est positive.
Donc, par croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$, nous obtenons, pour tout $\theta \in \left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$: $\sin^2(\theta) \leq \theta^2 \leq \tan^2(\theta)$.
Enfin, pour tout $\theta \in \left]0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$: $0 < \sin^2(\theta) \leq \theta^2 \leq \tan^2(\theta)$
La décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$ nous permet finalement de conclure :

$$\boxed{\forall \theta \in \left]0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[,\ \cot^2(\theta) \leq \frac{1}{\theta^2} \leq \cot^2(\theta) + 1}$$

3)a) *Ça sent la formule du binôme de Newton à plein nez... On peut aussi bien partir du membre de droite en y reconnaissant la forme développée de la formule que partir du membre de gauche et.. Et quoi, en fait ?*

Pour tout $\theta \in \left]0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$, $e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n = \big(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\big)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^{n-k}(\theta)\ i^k \sin^k(\theta)$
On a choisi de « donner » la puissance k à $i\sin(\theta)$ pour faire apparaître du i^k (comme voulu)

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com

Il nous faut du $\sin^n(\theta)$ *en facteur. Et bien, factorisons par* $\sin^n(\theta)$*. En justifiant proprement...*

Pour tout $\theta \in \left]0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$, $\sin(\theta) \neq 0$, donc $\sin^n(\theta) \neq 0$. D'où : $\forall \theta \in \left]0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$:

$e^{in\theta} = \sin^n(\theta) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^{n-k}(\theta)\ i^k \frac{\sin^k(\theta)}{\sin^n(\theta)} = \sin^n(\theta) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^{n-k}(\theta)\ i^k \sin^{k-n}(\theta)$

$= \sin^n(\theta) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\cos^{n-k}(\theta)}{\sin^{k-n}(\theta)}\ i^k$

Finalement, nous avons bien montré : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \theta \in \left]0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[,\ e^{in\theta} = \sin^n(\theta) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\ i^k\ \cot^{n-k}(\theta)}$

3)b) *Le rapport avec la question précédente ? Bien remarquer que ce qui a été montré à la 3)a) est valable pour TOUT entier naturel non nul* n*...*

Pour tout entier naturel non nul n, pour tout $\theta \in \left]0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$, $\sin\big((2n+1)\theta\big) = \mathrm{Im}\big(e^{i(2n+1)\theta}\big)$

Or, d'après 3)a) (comme $2n+1 \in \mathbb{N}^*$), $e^{i(2n+1)\theta} = \sin^{2n+1}(\theta) \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k}\ i^k\ \cot^{2n+1-k}(\theta)$

Et $\sin\big((2n+1)\theta\big) = \mathrm{Im}\big(e^{i(2n+1)\theta}\big)$.

Donc $\sin\big((2n+1)\theta\big) = \sin^{2n+1}(\theta) \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \mathrm{Im}(i^k)\ \cot^{2n+1-k}(\theta)$

Rappelons en effet que pour $z_1, .., z_N \in \mathbb{C}$ *et* $\alpha_1, .., \alpha_N \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Im}\big(\sum_{k=1}^{N} \alpha_k z_k\big) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \mathrm{Im}(z_k)$

Mais que faire avec ce $\mathrm{Im}(i^k)$ *?* i^k *est réel lorsque* k *est pair, et imaginaire pur lorsque* k *est impair... Autrement dit, lorsque* k *est pair,* $\mathrm{Im}(i^k) = 0$ *et, lorsque* k *est impair,* $\mathrm{Im}(i^k) = \frac{i^k}{i} = i^{k-1}$

$$\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \mathrm{Im}(i^k)\ \cot^{2n+1-k}(\theta) = \sum_{k=0,\ k \text{ impair}}^{2n+1} \binom{2n+1}{k}\ i^{k-1}\ \cot^{2n+1-k}(\theta)$$

Les nombres impairs k entre 0 et $2n+1$ sont les $2p+1$ avec p entre 0 et n.

Donc $\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \mathrm{Im}(i^k)\ \cot^{2n+1-k}(\theta) = \sum_{p=0}^{n} \binom{2n+1}{2p+1}\ i^{2p+1-1}\ \cot^{2n+1-2p-1}(\theta)$

$= \sum_{p=0}^{n} \binom{2n+1}{2p+1} (i^2)^p\ \cot^{2n-2p}(\theta) = \sum_{p=0}^{n} \binom{2n+1}{2p+1} (-1)^p\ \cot^{2n-2p}(\theta)$

D'où : $\sin\big((2n+1)\theta\big) = \sin^{2n+1}(\theta) \sum_{p=0}^{n} \binom{2n+1}{2p+1} (-1)^p\ \cot^{2n-2p}(\theta)$

Et on voudrait faire apparaître du $P_n\big(\cot^2(\theta)\big)$*... Ben oui, n'oublions pas la question.*

Or, $P_n\big(\cot^2(\theta)\big) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{2n+1}{2k} \big(\cot^2(\theta)\big)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} (-1)^{n-k} \cot^{2k}(\theta)$

En regardant l'expression obtenue pour $\sin\big((2n+1)\theta\big)$*, on se dit qu'un changement d'indice...*

Par changement d'indice ($p = n-k$), $\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} (-1)^{n-k} \cot^{2k}(\theta) = \sum_{p=0}^{n} \binom{2n+1}{2n-2p} (-1)^p\ \cot^{2n-2p}(\theta)$

Or, pour tout $p \in [\![0\ ;\ n]\!]$, $\binom{2n+1}{2n-2p} = \binom{2n+1}{2n+1-(2n-2p)} = \binom{2n+1}{2p+1}$

Donc $P_n\big(\cot^2(\theta)\big) = \sum_{p=0}^{n} \binom{2n+1}{2p+1} (-1)^p\ \cot^{2n-2p}(\theta)$.

On a bien montré : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \theta \in \left]0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[,\ \sin\big((2n+1)\theta\big) = \sin^{2n+1}(\theta) \times P_n\big(\cot^2(\theta)\big)}$

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $k \in [\![1\ ;\ n]\!]$, $\dfrac{k\pi}{2n+1} \in \left]0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$ (car $0 < \dfrac{k\pi}{2n+1} < \dfrac{k\pi}{2n} \leq \dfrac{n\pi}{2n}$)
Donc d'après 3)b), pour tout $k \in [\![1\ ;\ n]\!]$, $\sin\left((2n+1)\times\dfrac{k\pi}{2n+1}\right) = \sin^{2n+1}\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)\times P_n\left(\cot^2\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)\right)$
Autrement dit, pour tout $k \in [\![1\ ;\ n]\!]$, $\sin(k\pi) = \sin^{2n+1}\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)\times P_n\left(\cot^2\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)\right)$
Donc, pour tout $k \in [\![1\ ;\ n]\!]$, $\sin^{2n+1}\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)\times P_n\left(\cot^2\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)\right) = 0$
La fonction sinus ne s'annulant pas sur $\left]0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$, on a $\sin^{2n+1}\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right) \neq 0$.
Donc nécessairement : pour tout $k \in [\![1\ ;\ n]\!]$, $P_n\left(\cot^2\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)\right) = 0$
On a montré que pour tout $k \in [\![1\ ;\ n]\!]$, $\cot^2\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)$ est racine de P_n.

Attention, nous n'avons pas encore complètement répondu à la question ! Reste à montrer que les $\cot^2\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)$ *pour* $k \in [\![1\ ;\ n]\!]$ *sont les seules racines de* P_n.
Rappelons que tout polynôme à coefficients complexes de degré n *admet au plus* n *racines complexes distinctes. Il suffirait donc de montrer que les* $\cot^2\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)$ *sont 2 à 2 distincts, ça nous ferait* n *racines, et ça prouverait que ce sont les seules !*

La fonction $x \mapsto \cot(x)$ est strictement décroissante sur $]0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}[$, par quotient de la fonction $\cos$ strictement décroissante et positive sur $]0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}[$, et de la fonction $\sin$ strictement décroissante et strictement positive sur $]0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}[$ *Sinon, on dérive tout simplement* $\cot$*...*
De plus, pour tout $x \in]0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}[$, $\cot(x) \in \mathbb{R}_+^*$, et $x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
Nous pouvons en conclure, par composition, que la fonction $x \mapsto \cot^2(x)$ est strictement décroissante sur $]0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}[$.
D'où, pour tous $k, k' \in [\![1\ ;\ n]\!]$, si $k \neq k'$, $\cot^2\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right) \neq \cot^2\left(\dfrac{k'\pi}{2n+1}\right)$.
Les $\cot^2\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)$ (pour $k \in [\![1\ ;\ n]\!]$) sont donc n racines distinctes du polynôme P_n.
Or, P_n est de degré n (car $(-1)^{n-n}\binom{2n+1}{2n} \neq 0$) *(voir définition de* P_n*)*
Donc les n racines de P_n que nous avons exhibées sont les seules.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*\text{, l'ensemble des racines de } P_n \text{ est bien : } \left\{\cot^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right),\ k \in [\![1\ ;\ n]\!]\right\}}$$

5) *On nous demande à la question précédente de montrer que ce sont les racines de* P_n*, pour ensuite nous demander un résultat sur leur somme... N'avons-nous pas déjà croisé une histoire de somme de racines dans ce problème ?*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons, pour tout $k \in [\![0\ ;\ n]\!]$, $a_k = (-1)^{n-k}\binom{2n+1}{2k}$.
On a alors : $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, avec $a_n \neq 0$.

D'après les questions 1 et 5, nous avons : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cot^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = -\frac{a_{n-1}}{a_n} = -\frac{(-1)^{n-(n-1)}\binom{2n+1}{2(n-1)}}{(-1)^{n-n}\binom{2n+1}{2n}}$

$$\text{Donc : } \sum_{k=1}^{n}\cot^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{\binom{2n+1}{2n-2}}{\binom{2n+1}{2n}} = \frac{\binom{2n+1}{2n+1-(2n-2)}}{\binom{2n+1}{2n+1-2n}} = \frac{\binom{2n+1}{3}}{\binom{2n+1}{1}} = \frac{\frac{(2n+1)!}{3!(2n-2)!}}{2n+1} = \frac{(2n)!}{6(2n-2)!} = \frac{2n(2n-1)}{6}$$

$$\boxed{\text{En conclusion, pour tout } n \in \mathbb{N}^* : \sum_{k=1}^{n}\cot^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{n(2n-1)}{3}}$$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com

6) *Hein ? Mais quel rapport avec ce qui précède ? Il s'agit maintenant de reconstituer le puzzle. Dans quelle question avons-nous traité des inverses de carrés, et comment faire le lien avec une somme de* $\cot^2$ *?*

D'après la question 2, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $k \in [\![1\ ;\ n]\!]$;
$\cot^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \leq \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2} \leq \cot^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)+1$. D'où : $\cot^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \leq \frac{(2n+1)^2}{k^2\pi^2} \leq \cot^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)+1$

En sommant cette inégalité pour $k \in [\![1\ ;\ n]\!]$:

$$\sum_{k=1}^{n} \cot^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \leq \frac{(2n+1)^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \leq n + \sum_{k=1}^{n}\cot^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$$

En multipliant par $\frac{\pi^2}{(2n+1)^2} > 0$:

$$\frac{\pi^2}{(2n+1)^2}\sum_{k=1}^{n} \cot^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \leq \frac{\pi^2}{(2n+1)^2}\left[n + \sum_{k=1}^{n}\cot^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right]$$

Enfin, en utilisant le résultat de 5) :

$$\frac{\pi^2}{(2n+1)^2}\times\frac{n(2n-1)}{3} \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \leq \frac{\pi^2}{(2n+1)^2}\left[n + \frac{n(2n-1)}{3}\right] \quad \text{(et ce pour tout } n \in \mathbb{N}^*\text{)}$$

D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{\pi^2}{3}\times\frac{n(2n-1)}{(2n+1)^2} \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \leq \frac{\pi^2}{(2n+1)^2}\times\frac{2n+2n^2}{3}$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\pi^2}{3}\times\frac{n(2n-1)}{(2n+1)^2} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2\pi^2n^2}{12n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\pi^2}{(2n+1)^2}\times\frac{2n+2n^2}{3} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2\pi^2n^2}{12n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

(limites en l'infini des quotients des termes de plus haut degré des polynômes aux numérateurs et dénominateurs)

Le théorème des gendarmes nous permet de conclure que $\boxed{\text{la suite } \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers } \frac{\pi^2}{6}}$

Autrement dit, la série $\sum_{k\geq1}\frac{1}{k^2}$ *converge vers* $\frac{\pi^2}{6}$.

Cette démonstration, élégante de par la relative simplicité des outils mathématiques qu'elle mobilise, est l'idée d'un mathématicien grec contemporain, Iannis Papadimitriou (A Simple Proof of the Formula $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$*, 1973)*