Caractérisation des matrices de rang 1

Ayoub Hajlaoui

Énoncé : (temps conseillé : 15 min)

Soient n et p deux entiers naturels non nuls.

1) Montrer qu'une matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est de rang 1 si et seulement si il existe deux matrices colonnes non nulles $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ telles que $A = X\ {}^tY$ (où ${}^tY$ est la transposée de Y)

2) Cette écriture est-elle unique ?

Correction :

1) Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Si A est de rang 1, le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ engendré par les p matrices colonnes de A est de dimension 1. Donc, si C_1, C_2,...C_p sont les colonnes de A, il existe un vecteur non nul $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et p réels non tous nuls $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_p$ tels que : $\forall i \in [\![1;p]\!]$, $C_i = \lambda_i X$.

Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, on a alors : $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 & \lambda_2 x_1 \dots & \lambda_p x_1 \\ \lambda_1 x_2 & \lambda_2 x_2 \dots & \lambda_p x_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1 x_n & \lambda_2 x_n \dots & \lambda_p x_n \end{pmatrix}$

En posant $Y = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix}$, on a alors $X\ {}^tY = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_p \end{pmatrix}$

Donc $X\ {}^tY = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 & \lambda_2 x_1 \dots & \lambda_p x_1 \\ \lambda_1 x_2 & \lambda_2 x_2 \dots & \lambda_p x_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1 x_n & \lambda_2 x_n \dots & \lambda_p x_n \end{pmatrix} = A$, avec X non nul (dit précédemment) et Y non nul (car les λ_i sont non tous nuls).

On a donc montré : <u>si A est de rang 1, alors il existe deux matrices colonnes non nulles $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ telles que $A = X\ {}^tY$</u>

Réciproquement, s'il existe deux matrices colonnes non nulles $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ telles que $A = X\ {}^tY$, en posant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$, on a alors :

$A = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 \dots & x_1 y_p \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 \dots & x_2 y_p \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n y_1 & x_n y_2 \dots & x_n y_p \end{pmatrix}$. Pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, la i-ième colonne de A est donc $y_i X$

D'où : $\mathrm{rg}(A) = \dim \mathrm{Vect}\big(y_1 X, y_2 X, ..., y_p X\big)$, où la famille $\big(y_1 X, y_2 X, ..., y_p X\big)$ est engendrée par une seule matrice colonne non nulle X, et où les y_i sont non tous nuls (car Y non nul). Donc $\mathrm{rg}(A) = 1$.

On a donc montré : <u>s'il existe deux matrices colonnes non nulles $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ telles que $A = X\ {}^tY$, alors A est de rang 1.</u>

$\boxed{\text{En conclusion, une matrice } A \text{ de } \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \text{ est de rang 1 si et seulement si il existe deux matrices colonnes non nulles } X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ et } Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \text{ telles que } A = X\ {}^tY}$

2) Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang 1. On a donc l'existence de deux matrices colonnes non nulles $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ telles que $A = X\ {}^tY$.
Mais on a donc aussi (par exemple) : $A = (\frac{1}{2}X) \times (2\ {}^tY) = (\frac{1}{2}X) \times\ {}^t(2Y) = X_2\ {}^tY_2$
en posant $X_2 = \frac{1}{2}X$ et $Y_2 = 2Y$. Les vecteurs X et Y étant non nuls, on a $\frac{1}{2}X \neq X$ et $2Y \neq Y$
On a donc : $A = X\ {}^tY = X_2\ {}^tY_2$ avec $X_2 \neq X$ et $Y_2 \neq Y$.

$\boxed{\text{Cette écriture n'est donc pas unique.}}$