Matrice symétrique non diagonalisable

Ayoub Hajlaoui

Ce tout petit poème infirme une foutaise.
De votre théorème, lisez bien l'hypothèse.

Énoncé : (temps conseillé : 25 min)

Pour toute matrice M à coefficients complexes, on pose $M^* = {}^t\left(\overline{M}\right)$. Autrement dit, M^* est la transposée de la matrice dont les coefficients sont les conjugués des coefficients de M. Ou encore : si $M = (m_{i,j})$, $M^* = (\overline{m_{j,i}})$

1) Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{C}$

2) Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $M = M^*$. *Une telle matrice est dite hermitienne*
Montrer que M est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Correction :

Deux corrections (très similaires, à une pirouette vocabulaire près) sont proposées. La première utilise la notion de polynôme caractéristique (MP, PC, PSI..). La seconde revient au même, sans aborder cette notion, hors programme pour certaines filières (ECS2, BCPST2..)

Correction 1 (avec le polynôme caractéristique) :

1) *A n'est pas diagonalisable ?? Elle est symétrique, pourtant ! Quid du théorème spectral ?*

Soit P_A le polynôme caractéristique de A.
$P_A = \begin{vmatrix} 1-X & i \\ i & -1-X \end{vmatrix} = (1-X)(-1-X) - i^2 = (X-1)(X+1) + 1 = X^2$
Les valeurs propres de A sont les racines de P_A. Donc A a pour unique valeur propre 0.

Ensuite, classique. Résultat à connaître, et à savoir démontrer rapidement : une matrice non scalaire (qui ne s'écrit pas λI) qui n'a qu'une seule valeur propre ne peut être diagonalisable...

Supposons par l'absurde que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Il existe alors une matrice P inversible de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$ *(ben oui, A n'admet que 0 comme valeur propre)*
Donc A est la matrice nulle. Absurde.
En conclusion, $\boxed{A \text{ n'est en fait pas diagonalisable sur } \mathbb{C}.}$

Eh oui, votre théorème spectral parle des matrices symétriques réelles !

2) Posons $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, avec $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$. D'où $M^* = \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{pmatrix}$. Par hypothèse :
$M = M^*$. Donc $a = \overline{a}$, $d = \overline{d}$, $c = \overline{b}$ et $b = \overline{c}$. C'est-à-dire : $M = \begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & d \end{pmatrix}$ avec a et d réels.

Soit P_M le polynôme caractéristique de M. $P_M = (a-X)(d-X) - b\overline{b} = X^2 - (a+d)X + ad - |b|^2$.
Le discriminant de M est $\Delta = (a+d)^2 - 4(ad - |b|^2) = (a+d)^2 - 4ad + 4|b|^2$

Donc $\Delta = a^2 + 2ad + d^2 - 4ad + 4|b|^2 = (a-d)^2 + 4|b|^2$. Remarquons que Δ est un réel positif.

- Si $b \neq 0$, $|b|^2 > 0$ et donc $\Delta > 0$. M admet alors deux valeurs propres réelles distinctes, et est diagonalisable. *(même si on s'en fiche qu'elles soient réelles ici ; $\Delta \neq 0$ suffit)*
- Si $b = 0$, M est diagonale, donc diagonalisable. *Si je n'avais pas levé la tête du calcul de Δ, j'aurais pu ne pas le voir tout de suite.*

En conclusion, $\boxed{M \text{ est bien diagonalisable sur } \mathbb{C}.}$

Un théorème spectral similaire à celui que vous connaissez existe sur $\mathbb{C}$, en remplaçant l'hypothèse « symétrique réelle »par hermitienne.

Correction 2 (sans le polynôme caractéristique) :

1) *A n'est pas diagonalisable ?? Elle est symétrique, pourtant ! Quid du théorème spectral ?*

Les valeurs propres de A sont les complexes λ tels que $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible.
Pour tout $\lambda \in C$, $A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & i \\ i & -1-\lambda \end{pmatrix}$
Donc : « $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible » si et seulement si $(1-\lambda)(-1-\lambda) - i^2 = 0$
Les valeurs propres de A sont donc les racines de $(1-X)(-1-X)+1$, c'est-à-dire de X^2. Donc A a pour unique valeur propre 0.

Ensuite, classique. Résultat à connaître, et à savoir démontrer rapidement : une matrice non scalaire (qui ne s'écrit pas λI) qui n'a qu'une seule valeur propre ne peut être diagonalisable...

Supposons par l'absurde que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Il existe alors une matrice P inversible de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $A = P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$ *(ben oui, A n'admet que 0 comme valeur propre)*
Donc A est la matrice nulle. Absurde.
En conclusion, $\boxed{A \text{ n'est en fait pas diagonalisable sur } \mathbb{C}.}$

Eh oui, votre théorème spectral parle des matrices symétriques réelles !

2) Posons $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, avec $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$. D'où $M^* = \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{pmatrix}$. Par hypothèse :
$M = M^*$. Donc $a = \overline{a}$, $d = \overline{d}$, $c = \overline{b}$ et $b = \overline{c}$. C'est-à-dire : $M = \begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & d \end{pmatrix}$ avec a et d réels.
Les valeurs propres de M sont les complexes λ tels que $M - \lambda I_2$ n'est pas inversible, c'est-à-dire les racines du polynôme $(a-X)(d-X) - b\overline{b} = X^2 - (a+d)X + ad - |b|^2$.
Le discriminant de ce polynôme est $\Delta = (a+d)^2 - 4(ad - |b|^2) = (a+d)^2 - 4ad + 4|b|^2$
Donc $\Delta = a^2 + 2ad + d^2 - 4ad + 4|b|^2 = (a-d)^2 + 4|b|^2$. Remarquons que Δ est un réel positif.

- Si $b \neq 0$, $|b|^2 > 0$ et donc $\Delta > 0$. M admet alors deux valeurs propres réelles distinctes, et est diagonalisable. *(même si on s'en fiche qu'elles soient réelles ici ; $\Delta \neq 0$ suffit)*
- Si $b = 0$, M est diagonale, donc diagonalisable. *Si je n'avais pas levé la tête du calcul de Δ, j'aurais pu ne pas le voir tout de suite.*

En conclusion, $\boxed{M \text{ est bien diagonalisable sur } \mathbb{C}.}$

Un théorème spectral similaire à celui que vous connaissez existe sur $\mathbb{C}$, en remplaçant l'hypothèse « symétrique réelle »par hermitienne.