Série entière et dérivées

Ayoub Hajlaoui

Enfile cette cape et partons au secours
de ce bord qui échappe à ce que dit le cours.

Énoncé : (temps conseillé : 40 min)

Soit la série entière $\sum_{n\geq 0} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}x^{2n+2}$. En tout réel x où cette série converge, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}x^{2n+2}$

1) Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.
2) Étudier la nature de cette série en $x = R$ et $x = -R$
3) Montrer que f est continue sur $[-R\ ;\ R]$.
4) Montrer que pour tout $x \in]-1\ ;\ 1[$, $f'(x) = \arctan(x)$
5) Donner une expression « simple » de $f(x)$ pour tout $x \in]-1\ ;\ 1[$.
6) Déterminer la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$

Correction :

1)*Attention. Cette série entière n'est pas sous une jolie forme* $\sum_{n} a_n x^n$. *Hors de question, donc, d'utiliser la règle de d'Alembert pour les séries entières, qui s'intéresse à la limite du quotient* $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. *Mais l'on peut toujours utiliser la règle de d'Alembert « classique » pour les séries numériques...*
Pour l'anecdote, si on voulait écrire cette série entière sous la « jolie forme » mentionnée plus haut - ce qui n'est pas du tout nécessaire ici :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}x^{2n+2} = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}x^{2(n+1)} = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{\big(2(n-1)+1\big)\big(2(n-1)+2\big)}x^{2n}$$

On a effectué un changement d'indice.

Cette série est donc $\sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)\times 2n}x^{2n}$. *Coeff nul devant chaque puissance impaire de* x...

Cette série est donc : $\sum_{n\geq 1} a_n x^n$, *où, pour tout* $p \geq 1$, $a_{2p} = \dfrac{(-1)^{p-1}}{(2p-1)\times 2p}$, *et* $a_{2p+1} = 0$

Fermons la parenthèse, et revenons à l'exercice à proprement parler...

Soit $x \in \mathbb{R}^*$. En posant $u_n = \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}x^{2n+2}$, on a , pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$

Et : $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\dfrac{x^{2(n+1)+2}}{\big(2(n+1)\big)\big(2(n+1)+2\big)} \times \dfrac{(2n+1)(2n+2)}{x^{2n+2}}\right| = \left|\dfrac{x^2(2n+1)(2n+2)}{(2n+2)(2n+4)}\right| = x^2 \times \dfrac{2n+1}{2n+4}$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = x^2$.

D'après la règle de d'Alembert (pour les séries numériques), si $x^2 < 1$ (c-à-d si $|x| < 1$), $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ converge. Et si $|x| > 1$, $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ diverge. Autrement dit :

• pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < 1$, $\sum_{n\geq 0} \left|\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} x^{2n+2}\right|$ converge. Le rayon de convergence R vérifie donc : $R \geq 1$

• et pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| > 1$, $\sum_{n\geq 0} \left|\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} x^{2n+2}\right|$ converge. Le rayon de convergence R vérifie donc : $R \leq 1$

Finalement, $\boxed{\text{le rayon de convergence de cette série entière est : } R = 1.}$

2) Que ce soit en $x = 1$ ou $x = -1$, on s'intéresse en fait à la même série numérique : $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$.

Pour tout entier naturel n, $\left|\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}\right| = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$ et $\frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4n^2}$

Or, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{4n^2}$ converge (cf série de Riemann avec $2 > 1$).

Donc, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum_{n\geq 0} \left|\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}\right|$ converge.

Autrement dit, $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$ converge absolument, donc converge.

$\boxed{\text{Cette série entière est donc convergente en } x = 1 \text{ et en } x = -1.}$

Elle convergeait déjà d'emblée sur son intervalle ouvert de convergence $]-R\ ;\ R[$. *On sait désormais qu'elle converge sur* $[-R\ ;\ R]$.

3) On sait déjà que f est continue sur l'intervalle ouvert de convergence $]-1\ ;\ 1[$.
Je parle d'intervalle ouvert de convergence et non de disque ouvert de convergence car f est à variable réelle, mais le principe reste le même.
Reste à montrer que f est continue en -1 et en 1.

Mais le cours sur les séries entières ne me dit pas ce qu'il se passe sur les bords de l'intervalle de convergence ! Nous avons certes montré la convergence de cette série entière précisément sur les bords, mais rien - en tous cas rien du cours - ne nous indique sa continuité en ces bords.
Pour l'anecdote, sachez qu'il existe un théorème, le théorème d'Abel radial, a priori pas à votre programme, qui implique la continuité de la série entière sur $[-R\ ;\ R]$ pour peu qu'elle soit convergente en $-R$ et en R.
Mais si notre cours sur les séries entières se tait sur les bords, que faire ? Essayer de voir plus large, en revenant à celui sur les séries de fonctions en général...

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit f_n la fonction définie sur $[-1\ ;\ 1]$ par $f_n(x) = \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}$

Pour tout $x \in [-1\ ;\ 1]$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[-1\ ;\ 1]$.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [-1\ ;\ 1]$, $|f_n(x)| \leq \frac{1}{4n^2}$, avec $\frac{1}{4n^2}$ indépendant de x, et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{4n^2}$ convergente. Donc $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement, et donc uniformément, sur $[-1\ ;\ 1]$.

Nous pouvons en conclure, par théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions, que $\boxed{f \text{ est continue sur } [-1\ ;\ 1].}$

4) f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert de convergence de la série entière, $]-1\ ;\ 1[$
Sur cet intervalle, on obtient l'expression de f' à partir de celle de f en dérivant terme à terme :
pour tout $x \in\ ]-1\ ;\ 1[$, $f'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}(2n+2)x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$
On reconnaît le développement en série entière sur $]-1\ ;\ 1[$ de la fonction arctan.
Donc : $\boxed{\text{pour tout } x \in\ ]-1\ ;\ 1[,\ f'(x) = \arctan(x)}$

Si l'on ne connaît pas ce développement limité usuel, ou si on l'a oublié, on peut se servir de f'' : $\forall x \in\ ]-1\ ;\ 1[,\ f''(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{1-(-x^2)}$ *(série géométrique)*
Donc, pour tout $x \in\ ]-1\ ;\ 1[,\ f''(x) = \dfrac{1}{1+x^2} = \arctan'(x)$. *Il existe donc* $K \in \mathbb{R}$ *tel que :*
pour tout $x \in\ ]-1\ ;\ 1[,\ f'(x) = \arctan(x) + K$. *De plus,* $f'(0) = 0$ *et* $\arctan(0) = 0$ *donc* $K = 0$.

5) arctan est continue sur $\mathbb{R}$. D'après 4), f est une primitive de arctan sur $]-1\ ;\ 1[$. Et $f(0) = 0$. Sur $]-1\ ;\ 1[$, f est donc la primitive de arctan s'annulant en 0.
On en déduit : $\forall x \in\ ]-1\ ;\ 1[,\ f(x) = \displaystyle\int_0^x \arctan(t)\ \mathrm{d}t$

Ben la voilà votre expression « simple » ! Je peux passer à la suite ?
…
Bon j'arrête.
Pour tout $x \in\ ]-1\ ;\ 1[,\ f(x) = \displaystyle\int_0^x \arctan(t) \times 1\ \mathrm{d}t$.
Posons $u(t) = \arctan(t)$, $v(t) = t$. u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
$u'(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ et $v'(t) = 1$
Une intégration par parties fournit : $f(x) = \big[t\arctan(t)\big]_0^x - \displaystyle\int_0^x \frac{t}{1+t^2}\ \mathrm{d}t$
$= x\arctan(x) - 0 - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^x \frac{2t}{1+t^2}\ \mathrm{d}t = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\Big[\ln\left(|1+t^2|\right)\Big]_0^x$
Finalement, $\boxed{\text{pour tout } x \in\ ]-1\ ;\ 1[,\ f(x) = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)}$

6) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} = f(1)$
Bien malheureusement, l'expression obtenue en 5) n'est valable que sur $]-1\ ;\ 1[$
…
Mais… Ne savons-nous donc rien sur f *en* 1 *?*

D'après 3), f est continue en 1. On a donc : $f(1) = \displaystyle\lim_{x\to 1^{(-)}} f(x)$
Or, d'après 5), pour tout $x \in\ ]-1\ ;\ 1[,\ f(x) = x\arctan(x) - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$.
Donc $\displaystyle\lim_{x\to 1^{(-)}} f(x) = \lim_{x\to 1^{(-)}} x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) = 1\arctan(1) - \frac{1}{2}\ln(2) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2)$
(par continuité de $x \mapsto x\arctan(x) - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$ en 1)

Nous avons donc établi : $\boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2}}$